# تفاضل وتكامل (1)

قسم الرياضيات

كلية العلوم

88897730

# الدوال المثلثية و المثلثية العكسية

# Trigonometric and Inverse Trigonometric Functions

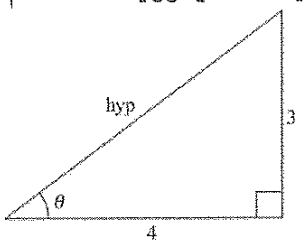
٤- دالة مقلوب دالة الظل $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{adj}{opp}$ هي النسبة بين طول الضلع المجاور للزاوية $\theta$ إلي طول الضلع المقابل للزاوية $\theta$.

٥- دالة مقلوب دالة الجيب التمام $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{hyp}{adj}$ هي النسبة بين طول الوتر إلي طول الضلع المجاور للزاوية $\theta$.

٦- دالة مقلوب دالة الجيب $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{hyp}{opp}$ هي النسبة بين طول الوتر إلي طول الضلع المقابل للزاوية $\theta$.

**مثال(١)**

أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية $\theta$ أحدي زوايا المثلث القائم كما الشكل (٢)




شكل (٢)

الحل

لكي نستطيع حساب قيم الدوال المثلثية لابد من حساب طول الوتر وذلك باستخدام العلاقة الآتية

$$(hyp)^2 = (adj)^2 + (opp)^2$$

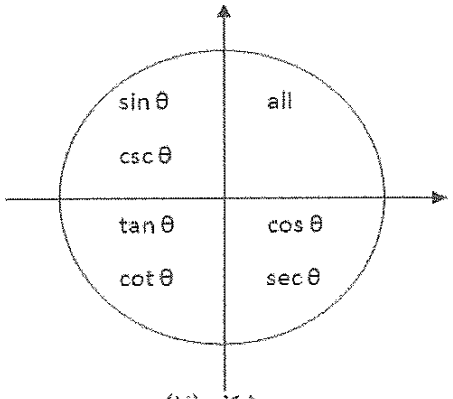
ومنها نحصل علي

$$hyp = \sqrt{(adj)^2 + (opp)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

ثم نحسب الدوال المثلثية طبقا لتعريف كل واحدة

$$\sin\theta = \frac{opp}{hyp} = \frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{adj}{hyp} = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{opp}{adj} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{adj}{opp} = \frac{4}{3} \qquad \sec\theta = \frac{hyp}{adj} = \frac{5}{4} \qquad \csc\theta = \frac{hyp}{opp} = \frac{5}{3}$$



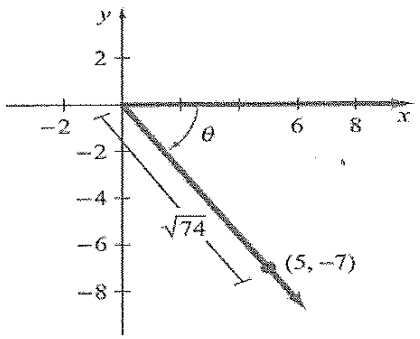

شكل (٧)

**مثال (٨)**

إذا كانت $\tan\theta = -\frac{7}{5}$ و كانت $\sin\theta < 0$ فأوجد $\csc\theta$ , $\cos\theta$

الحل

من المعطيات نجد أن الدالتين $\sin\theta$ , $\tan\theta$ سالبتين وهذا يعني أن الزاوية $\theta$ تقع في الربع الرابع $(IV)$




شكل (٨)

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-7}{5}$ أي أن $y = -7$ , $x = 5$

نحسب قيمة $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$

## ١/٢ - المتطابقات الرئيسية:

- **متطابقة المقلوب**

$$\sin x = \frac{1}{\csc x} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sec x} \quad , \quad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

- **متطابقة النسبة**

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

- **متطابقة فيثاغورث**

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad , \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

**مثال(١٥)**

أثبت أن $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \ \cos^2 x}$

الحل

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \ \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \ \cos^2 x}$$

**مثال(١٦)**

أثبت أن $\tan\theta = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ , $\forall \ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

الحل

$\because \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\forall \ \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \qquad \cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\because \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\therefore \quad \tan\theta = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$

**مثال(١٧)**

أثبت أن $\csc^2 x - \cos^2 x \ \csc^2 x = 1$

## ٣/٢- متطابقات حاصل طرح زاويتان:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\ \tan\beta}$$

**مثال(٢١)**

بدون استخدام الآلة الحاسبة أحسب قيمة $\cos(15^\circ)$

الحل

$$\cos(15^\circ)=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

**مثال(٢٢)**

أكتب الصيغ التالية كدالة مثلثيه واحدة:

*a*) $\sin 5\theta\ \cos 3\theta-\cos 5\theta\ \sin 3\theta$

*b*) $\dfrac{\tan 4\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 4\alpha\ \tan\alpha}$

الحل

*a*) $\sin 5\theta\ \cos 3\theta-\cos 5\theta\ \sin 3\theta=\sin(5\theta-3\theta)=\sin 2\theta$

*b*) $\dfrac{\tan 4\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 4\alpha\ \tan\alpha}=\tan(4\alpha+\alpha)=\tan 5\alpha$

**مثال(٢٣)**

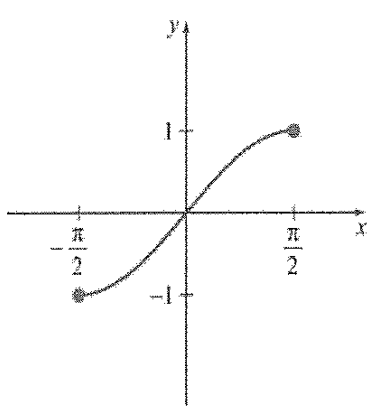
إذا كان $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ والزاوية $\alpha$ تقع داخل الربع الثاني(II) وإذا كان $\tan\beta=-\frac{5}{12}$ والزاوية $\beta$ تقع داخل الربع الرابع (IV). أحسب قيمة $\sin(\alpha+\beta)$

الحل

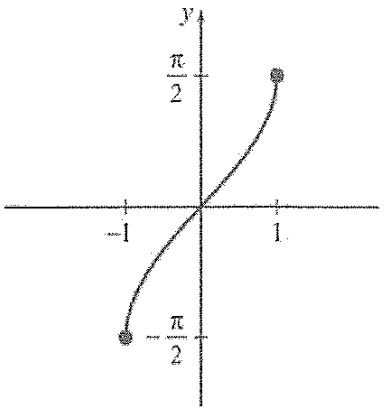
## ٣- تعريف الدوال المثلثية العكسية:

١- تسمي الدالة $y = \sin^{-1} x$ دالة الجيب العكسية إذا وإذا فقط كان $x = \sin y$ حيث أن

$$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad -1 \le x \le 1$$




$y = \sin x \ , \ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

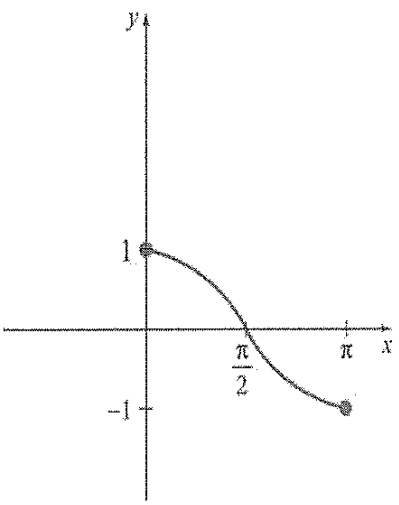



$y = \sin^{-1} x \ , \ -1 \le x \le 1$

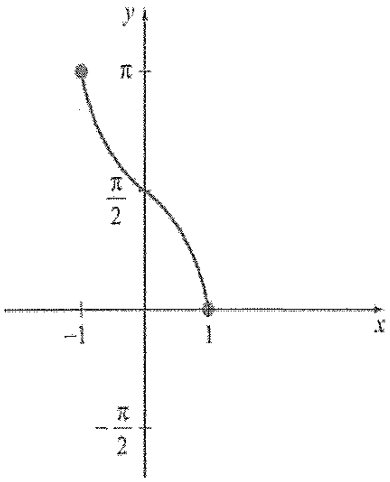
| | $y = \sin^{-1} x$ | $y = \sin x$ |
|---|---|---|
| المجال | $-1 \le x \le 1$ | $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ |
| المدى | $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ | $-1 \le y \le 1$ |

٢- تسمي الدالة $y = \cos^{-1} x$ دالة الجيب التمام العكسية إذا وإذا فقط كان $x = \cos y$

حيث أن $0 \le y \le \pi$ , $-1 \le x \le 1$




$y = \cos x$ , $0 \le x \le \pi$

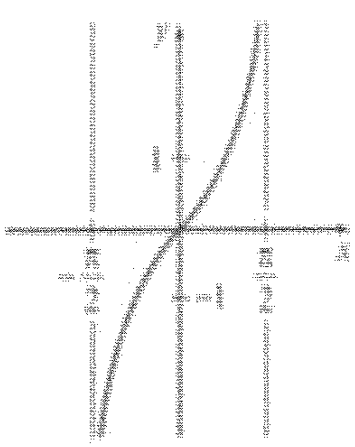



$y = \cos^{-1} x$ , $-1 \le x \le 1$

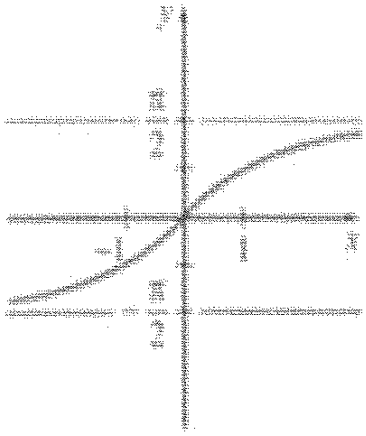
| | $y = \cos^{-1} x$ | $y = \cos x$ |
|---|---|---|
| المجال | $-1 \le x \le 1$ | $0 \le x \le \pi$ |
| المدى | $0 \le y \le \pi$ | $-1 \le y \le 1$ |

٣- تسمي الدالة $y = \tan^{-1} x$ دالة الظل العكسية إذا وإذا فقط كان $x = \tan y$

حيث أن $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ، $-\infty < x < \infty$



$y = \tan x$ , $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

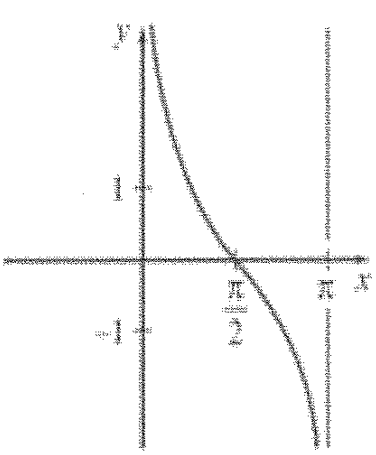


$y = \tan^{-1} x$ , $-\infty < x < \infty$

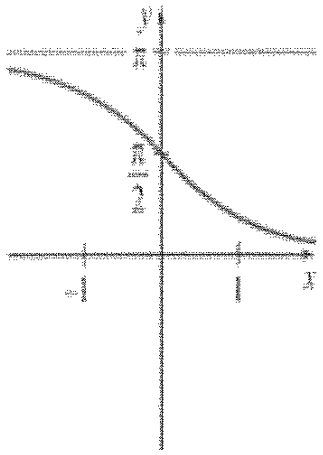
| | $y = \tan^{-1} x$ | $y = \tan x$ |
|---|---|---|
| المجال | $-\infty < x < \infty$ | $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ |
| المدى | $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ | $-\infty < y < \infty$ |

٤- تسمي الدالة $y = \cot^{-1} x$ دالة مقلوب الظل العكسية إذا وإذا فقط كان $x = \cot y$

حيث أن $0 < y < \pi$ , $-\infty < x < \infty$




$y = \cot x$ , $0 < x < \pi$

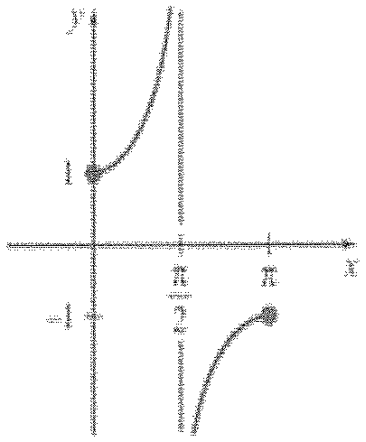



$y = \cot^{-1} x$ , $-\infty < x < \infty$

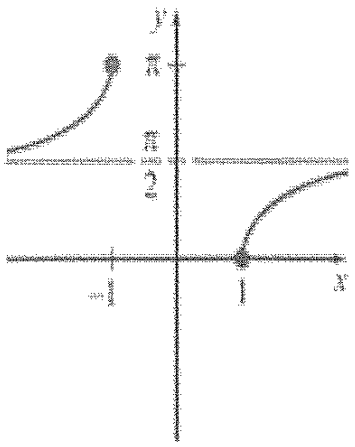
| | $y = \cot^{-1} x$ | $y = \cot x$ |
|---|---|---|
| المجال | $-\infty < x < \infty$ | $0 < x < \pi$ |
| المدى | $0 < y < \pi$ | $-\infty < y < \infty$ |

٥- تسمي الدالة $y = \sec^{-1} x$ دالة مقلوب الظل العكسية إذا وإذا فقط كان $x = \sec y$

حيث أن $0 \le y \le \pi \ , \ y \neq \frac{\pi}{2}$ , $x \le -1 \ or \ x \ge 1$




$y = \sec x \ , \ 0 \le x \le \pi \ , \ x \neq \frac{\pi}{2}$

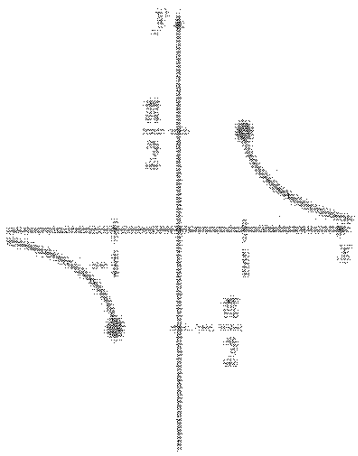



$y = \sec^{-1} x \ , \ x \le -1 \ or \ x \ge 1$

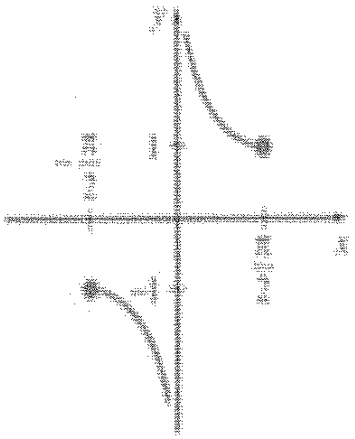
| $y = \sec x$ | $y = \sec^{-1} x$ | |
|---|---|---|
| $0 \le x \le \pi \ , \ x \neq \frac{\pi}{2}$ | $x \le -1 \ or \ x \ge 1$ | المجال |
| $y \le -1 \ or \ y \ge 1$ | $0 \le y \le \pi \ , \ y \neq \frac{\pi}{2}$ | المدى |

٦- تسمي الدالة $y = \csc^{-1} x$ دالة مقلوب الظل العكسية إذا وإذا فقط كان $x = \csc y$

حيث أن $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ , $x \neq 0$ , $x \le -1 \; or \; x \ge 1$



$y = \csc^{-1} x$ , $x \le -1 \; or \; x \ge 1$



$y = \csc x$ , $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ , $x \neq 0$

| | $y = \csc^{-1} x$ | $y = \csc x$ |
|---|---|---|
| المجال | $x \le -1 \; or \; x \ge 1$ | $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ , $x \neq 0$ |
| المدى | $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ , $y \neq 0$ | $y \le -1 \; or \; y \ge 1$ |

**مثال(٢٨)**

بدون استخدام الآلة الحاسبة أحسب القيم التالية

$a)\quad y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\qquad$ $b)\quad y=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

الحل

$a)\quad y=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \tan y=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow y=\frac{\pi}{6}$

$b)\quad y=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \cos y=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y\in[0,\pi]$

$\Rightarrow y=\frac{3\pi}{4}$

## ٤ - تركيب الدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x$ | $\forall\ x\in[-1,1]$ |
| 2) | $\cos\left(\cos^{-1}x\right)=x$ | $\forall\ x\in[-1,1]$ |
| 4) | $\tan\left(\tan^{-1}x\right)=x$ | $\forall\ x\in(-\infty,\infty)$ |
| 4) | $\sin^{-1}\left(\sin x\right)=x$ | $\forall\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ |
| 5) | $\cos^{-1}\left(\cos x\right)=x$ | $\forall\ x\in[0,\ \pi]$ |
| 6) | $\tan^{-1}\left(\tan x\right)=x$ | $\forall\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ |

**مثال(٢٩)**

بدون استخدام الآلة الحاسبة أحسب القيم التالية

$a)\quad \sin\left(\sin^{-1}0.5\right)$ $\qquad$ $b)\quad \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)$

$c)\quad \tan\left(\tan^{-1}2.3\right)$ $\qquad$ $d)\quad \tan^{-1}\left(\tan\frac{4\pi}{3}\right)$

الحل

*a*) $\because 0.5 \in [-1,1] \Rightarrow \sin(\sin^{-1} 0.5) = 0.5$

*b*) $\because \frac{\pi}{2} \in [0,\pi] \Rightarrow \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

*c*) $\because 2.3 \in (-\infty,\infty) \Rightarrow \tan(\tan^{-1} 2.3) = 2.3$

*d*) $\because \frac{4\pi}{3} \notin \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan^{-1}\left(\tan\frac{4\pi}{3}\right) \neq \frac{4\pi}{3}$

$\because \tan\frac{4\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ *and* $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\tan^{-1}\left(\tan\frac{4\pi}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

# تمارين

١- بدون استخدام الآلة الحاسبة أحسب القيم التالية

*a)* $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ *b)* $\sec\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}$

٢- بدون استخدام الآله الحاسبة أحسب الدوال المثلثية للزاوية $\theta$ التي تصنعها متجة الموضع للنقطة $P(4,-3)$ مع المحور الإبتدائي.

٣- إذا كانت $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ و كانت $\cos\theta > 0$ فأوجد $\sec\theta$ , $\tan\theta$

٤- أرسم الدوال المثلثية التالية

*a)* $y = -2\sin x$ *b)* $y = \cos\frac{x}{2}$

٥- أثبت المتطابقات التالية

*a)* $\tan x \csc x \cos x = 1$ *b)* $\csc x + \cot x = \frac{\sin x}{1-\cos x}$

*c)* $\frac{\cot x + \tan x}{\csc x} = \sec x$ *d)* $\frac{\cot x + \tan x}{\sec x} = \csc x$

*e)* $1+\sin x = \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ *f)* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

٦ - بدون استخدام الآلة الحاسبة أحسب القيم التالية

*a)* $\sin\left(\cos^{-1}\frac{2}{5}\right)$ *b)* $\sin\left[\sin^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$

*c)* $\cos\left(\cos^{-1}2\right)$ *d)* $\tan\left[\cos^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right]$

٧- أثبت المتطابقات التالية

*a)* $\cos\left(\sin^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$ *b)* $\sec\left(\sin^{-1}x\right) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$

## بند ٣ : مشتقة الدوال الزائدية و الزائدية العكسية :

(Derivative of The Hyperbolic and the Inverse Hyperbolic Functions)

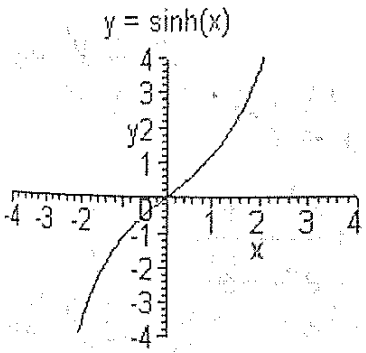
تعريف (٤.٣.١) :

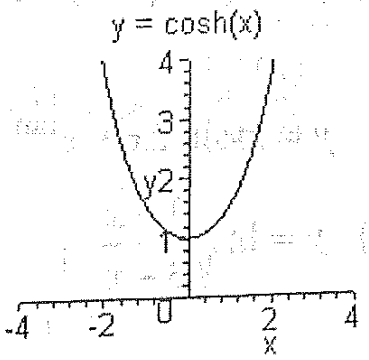
تسمى الدالة $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ بدالة الجيب الزائدي للعدد $x$ ونرمز لها بالرمز $\sinh x$ وتسمى الدالة $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ بجيب التمام الزائدي ونرمز لها بالرمز $\cosh x$ ، أي أن :

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ;\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

ويلاحظ أن الدالة $\cosh x$ دالة زوجية على $R$ ومداها هو الفترة $[1,\infty[$ ، بينما الدالة $\sinh x$ دالة فردية على $R$ ومداها هو $R$ . يلاحظ أيضا أن

$$\sinh x=0\Leftrightarrow x=0\ ,\ \cosh x\geq 1\ ,\ \forall x\in R$$




من التعريف السابق يمكن استنتاج أن : $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

وبرهان ذلك كالآتي :

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})-\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})=1$$

وبنفس الكيفية وباستخدام التعريف السابق يمكن إثبات المتطابقات التالية :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

تعريف (٤. ٣. ٢) :

يعرف الظل الزائدى $\tanh x$ وظل التمام الزائدى $\coth x$ والقاطع الزائدى $\operatorname{sech} x$ وقاطع التمام الزائدى $\operatorname{csch} x$ على النحو التالي :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad ; \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad ; \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

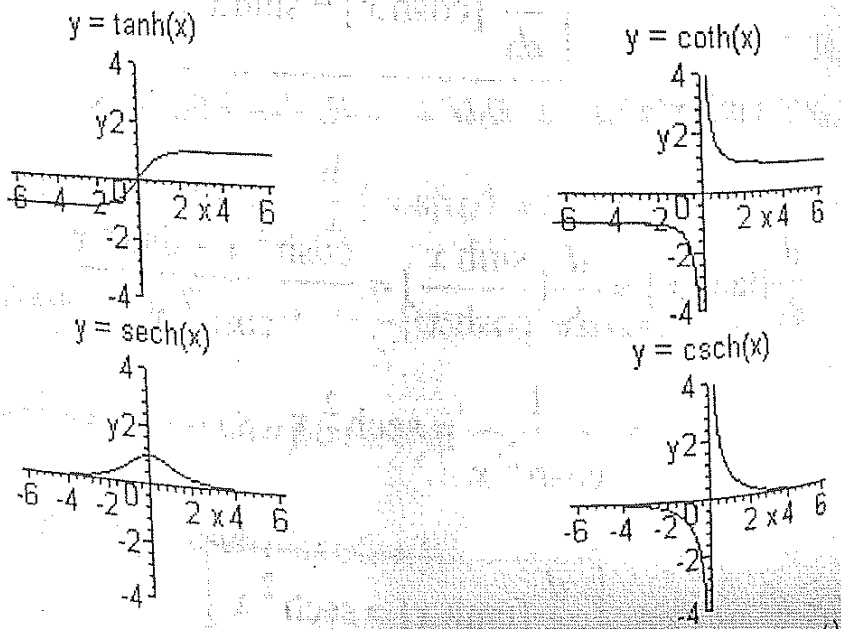
يمكن إثبات المتطابقات الآتية :

$$\tanh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y};$$

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \; ; \; \operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$$

منحنيات بقية الدوال الزائدية تأخذ الصورة :




ملاحظة (٤. ٣. ٢) :

أي متطابقة صحيحة للدوال المثلثية تكون صحيحة أيضا للدوال الزائدية المناظرة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$y = 2\cosh(2x+1) + 5^{\tanh x}\operatorname{sech}^2 x \ln 5$$

للدوال الزائدية التى تم تعريفهم فى هذا البند يوجد لهم دوال زائدية عكسية

النظرية التالية تعرف الدوال الزائدية العكسية كدوال لوغاريتمية.

نظرية (٢.٦.٤): (الدوال الزائدية العكسية)

| الدالة | النطاق |
|---|---|
| $\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ | $]-\infty,\infty[$ |
| $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ | $[1,\infty[$ |
| $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ | $]-1,1[$ |

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

| | |
|---|---|
| $\coth^{-1} x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$ | $]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$ |
| $\operatorname{sech}^{-1}x=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ | $]0,1]$ |
| $\operatorname{csch}^{-1}x=\ln(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\lvert x\rvert})$ | $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$ |

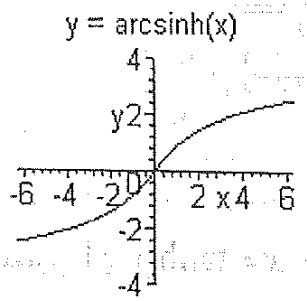
البرهان:

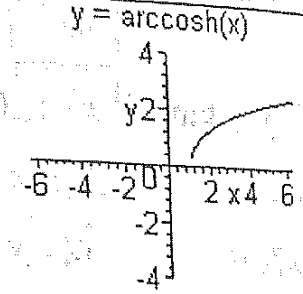
برهان هذه النظرية يأتي مباشرة كتطبيق للعلاقة التي تربط الدالة الأسية بالدالة اللوغاريتمية . فعلى سبيل المثال إذا فرضنا أن :

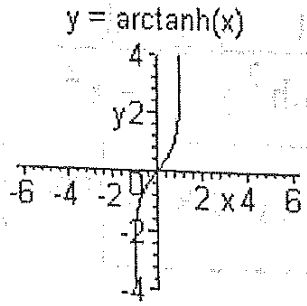
$$f(x)=\sinh x \quad \text{فإن} \quad f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

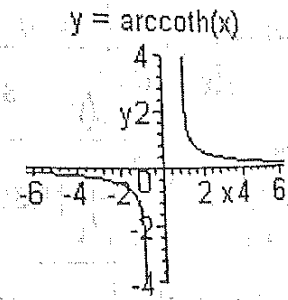
ولبرهان ذلك نثبت أن $(fof^{-1})(x)=x=(f^{-1}of)(x)$ . وبقية الدوال بالمثل.

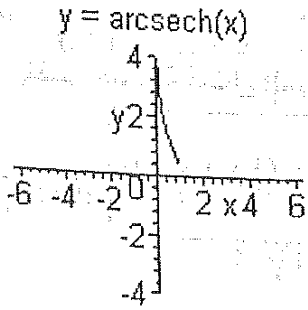
منحنيات الدوال الزائدية العكسية تأخذ الصورة :

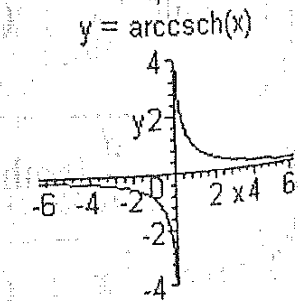



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

# النهايات والاتصال
# Limits and Continuity

نهتم في هذا الفصل بدراسة النهايات والاتصال لبعض من الدوال $f(x)$ عند بعض النقط التي تكون هذه الدالة معرفة عندها وكذلك النقط التي تكون الدالة غير معرفة عندها.

## ١- النهايات Limits:

### ١/١- تعريف النهاية عند نقطة:

**تعريف(١):**

إذا اقتربت قيمة دالة ما $f(x)$ من مقدار معين $L$ كلما اقتربت $x$ من $x_0$ خلال قيم أكبر أو أصغر من $x_0$ فإننا نقول بأن الدالة $f(x)$ لها النهاية $L$ عندما تقترب $x$ من $x_0$ وتكتب رياضيا

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

وبشكل آخر لإيجاد قيمة النهاية للدالة $f(x)$ عند النقطة $x_0$ وخاصة إذا كانت الدالة $f(x)$ غير معرفة عند هذه النقطة نوجد قيم الدالة $f(x)$ عند قيم $x$ والتي تقترب من $x_0$ من جهة اليمين أي عندما تكون $x$ أكبر من $x_0$ بشيء قليل جدا وكذلك عند قيم $x$ التي تقترب من $x_0$ من جهة اليسار أي عند قيم $x$ التي تكون أصغر من $x_0$ بشيء قليل فإذا وجدنا القيم علي اليمين واليسار تتراكم حول نقطة واحدة $L$ فان هذه النقطة تمثل نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $x_0$ وتكتب رياضيا $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$

وتعرف هذه الطريقة بالطريقة العددية.

**مثال(١)**

أبحث وجود النهاية للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تقترب $x$ من 1

الحل

نوجد قيم الدالة $f(x)$ بجوار 1 كما في الجدول التالي

**مثال(٣)**

باستخدام الطريقة العددية أوجد نهاية الدالة $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

الحل

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0. 1 | 0.9983341665 |
| 0.01 | 0.9999833334 |
| 0.001 | 0.9999998333 |
| 0.0001 | 0.9999999983 |
| 0 | غير معرفة |
| -0.0001 | 0.9999999983 |
| -0.001 | 0.9999998333 |
| -0.01 | 0.9999833334 |
| -0. 1 | 0.9983341665 |

ومن المعلومات الموضحة بالجدول السابق نجد أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**مثال(٤)**

باستخدام الطريقة العددية أوجد نهاية الدالة $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

الحل

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0. 1 | 0.05 |
| 0.01 | 0.005 |
| 0.001 | 0.0005 |
| 0.0001 | 0.00005 |
| 0 | غير معرفة |
| -0.0001 | - 0.00005 |
| -0.001 | - 0.0005 |
| -0.01 | - 0. 005 |
| -0. 1 | - 0.05 |

ومن المعلومات الموضحة بالجدول السابق نجد أن

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{1-\cos x}{x}=0$$

## ١/٢- خواص النهايات:

لأي دالتين $f(x),\ g(x)$ إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=L,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=M$ فإن

(1) $\lim_{x\to x_0}\ [f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm \lim_{x\to x_0} g(x)=L\pm M$

(2) $\lim_{x\to x_0}\ [f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)=L\cdot M$

(3) $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L}{M}$, $\qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=M\neq 0$

(4) $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n=L^n$,

(5) $\lim_{x\to x_0}\ \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}=\sqrt[n]{L}$ .

## ١/٣- الطريقة التحليلية لإيجاد النهايات:

لإيجاد النهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب $x$ من $x_0$ نعين قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=x_0$ ( أي نوجد $f(x_0)$ ):

١- إذا كانت $f(x_0)$ تساوي عدد فإن هذا العدد يمثل قيمة النهاية مباشرة.

مثال (٥)

أوجد النهاية للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تقترب $x$ من 1

الحل

$$\lim_{x\to 1}\ (3x+2)=3\cdot 1+2=5$$

٢- إذا كانت $f(x_0)$ تساوي عدد مقسوم علي الصفر فإن في هذه الحالة لا يوجد نهاية للدالة عند هذه النقطة. فمثلا الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ ليس لها نهاية عندما تقترب $x$ من الصفر.

٣- إذا كانت الدالة $f(x_0)$ تساوي $\frac{0}{0}$ فإن في هذه الحالة يوجد نهاية ولابد من تعينها. وهناك طرق عديدة لتعيين النهاية في هذه الحالة:

أوجد قيمة $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

حيث أن الدالة يتغير تعريفها علي يمين ويسار النقطة $x=1$ ولذلك نوجد كل من النهاية اليمني والنهاية اليسري عند النقطة $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+3) = 1+3 = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(4x^2+2x-2) = 4+2-2 = 4$$

وحيث أن قيمة النهاية اليمني تساوي قيمة النهاية اليسري

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$$

إذن $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

**مثال(٣١)**

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة $f(x) = |x|$ فأوجد قيمة $\lim_{x\to 0} f(x)$

الحل

من تعريف دالة المقياس

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

وحيث أن الدالة يتغير تعرفها علي يمين ويسار النقطة $x=0$ ولذلك نوجد كل من النهاية اليمني والنهاية اليسري عند النقطة $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

حيث أن قيمة النهاية اليمني تساوي قيمة النهاية اليسري

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

إذن $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

**مثال(٣٢)**

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة $f(x)=|x+1|$ فأوجد قيمة $\lim_{x\to -1} f(x)$

الحل

من تعريف دالة المقياس

$$|x+1|=\begin{cases} x+1 & x\geq -1 \\ -(x+1) & x<-1 \end{cases}$$

حيث أن الدالة يتغير تعرفها علي يمين ويسار النقطة $x=-1$ ولذلك نوجد كل من النهاية اليمني والنهاية اليسري عند النقطة $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(x+1)=0$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1} -(x+1)=0$$

حيث أن قيمة النهاية اليمني تساوي قيمة النهاية اليسري

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=0$$

إذن $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

**مثال(٣٣)**

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة $f(x)=|x-2|+3$ فأوجد قيمة

$$\lim_{x\to 2} f(x)$$

الحل

من تعريف دالة المقياس

$$|x-2|=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -(x-2) & x<2 \end{cases}$$

إذن الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x\geq 2 \\ -x+5 & x<2 \end{cases}$$

وحيث أن الدالة يتغير تعريفها علي يمين ويسار النقطة $x=2$ لذلك نوجد كل من النهاية اليمني والنهاية اليسري عند النقطة $x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x+5) = -2+5 = 3$$

حيث أن قيمة النهاية اليمني تساوي قيمة النهاية اليسري

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$$

إذن

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

**مثال(٣٤)**

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(2x^2+5), & x \le 1 \\ 6-5x, & 1 < x < 3 \\ x-12 & x \ge 3 \end{cases}$$

أوجد قيمة $\lim_{x\to 1} f(x), \lim_{x\to 3} f(x)$ .

الحل

**أولا:** نوجد النهاية عند النقطة $x=1$ .

حيث أن الدالة يتغير تعريفها علي يمين ويسار النقطة $x=1$ لذلك نوجد كل من النهاية اليمني والنهاية اليسري عند النقطة $x=1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(6-5x) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{5}(2x^2+5) = \frac{1}{5}(2+5) = \frac{7}{5}$$

وحيث أن قيمة النهاية اليمني لا تساوي قيمة النهاية اليسري

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

إذن $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة .

**ثانيا:** نوجد النهاية عند النقطة $x=3$

حيث أن الدالة يتغير تعريفها علي يمين ويسار النقطة $x=3$ ولذلك نوجد كل من النهاية اليمني والنهاية اليسري النقطة $x=3$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} (x-12) = 3-12 = -9$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} (6-5x) = 6-15 = -9$$

وحيث أن قيمة النهاية اليمني تساوي قيمة النهاية اليسري

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$$

إذن $\lim_{x\to 3} f(x) = -9$

## ٢- الاتصال Continuity:

سوف نتعرف علي مفهوم الاتصال وبعض النظريات الهامة في الاتصال لبعض من الدوال.

### ٢/١- تعريف الاتصال:

**تعريف(٢):**

نقول أن الدالة $f(x)$ متصلة Continuous عند النقطة $x_0$ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية

١- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x_0$ .

٢- النهاية للدالة $f(x)$ موجودة عند النقطة $x_0$ ( بمعني $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجودة)

٣- قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_0$ تساوي قيمة النهاية عند هذه النقطة ويعبر عنها رياضيا $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

**ملاحظة**

الدالة $f(x)$ تكون متصلة في الفترة المفتوحة إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة تقع داخل الفترة .

وهناك بعض النظريات الهامة علي الاتصال سوف نقوم بصياغتها بدون برهان

**نظرية(٤):**

دوال كثيرات الحدود تكون متصلة عند كل النقط .

**نظرية(٥):**

إذا كانت $f(x),\ g(x)$ دالتان متصلتان عند النقطة $x_0$ فإن كل من

$$f(x)+g(x),\qquad f(x)-g(x),\qquad f(x)g(x),\qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

دوال متصلة عند النقطة $x_0$ بشرط أن $g(x_0)\neq 0$ في الدالة الأخيرة.

**نظرية(٦): اتصال الدوال الكسرية:**

تكون الدالة الكسرية متصلة عند كل النقاط فيما عدا النقاط التي ينعدم عندها المقام(أصفار المقام).

وهناك بعض المفاهيم الهامة في الاتصال كالاتصال من جهة اليمين أو اليسار

**تعريف(٣):**

الدالة $f(x)$ متصلة من جهة اليسار عند النقطة $x_0$ إذا تحققت الشروط الآتية:

١- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x_0$

٢- النهاية اليسري للدالة $f(x)$ موجودة عند النقطة $x_0$ ( بمعني $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ موجودة)

٣- قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_0$ تساوي قيمة النهاية اليسري عند هذه النقطة.

**تعريف(٤):**

الدالة $f(x)$ متصلة من جهة اليمين عند النقطة $x_0$ إذا تحققت الشروط الآتية:

١- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x_0$ .

٢- النهاية اليمني للدالة $f(x)$ موجودة عند النقطة $x_0$ ( بمعني $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ موجودة)

٣- قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x_0$ تساوي قيمة النهاية اليمني عند هذه النقطة .

**مثال(٣٥)**

أبحث اتصال الدالة $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ عند النقطة $x=2$ إذا كانت $x\neq 3$

الحل

١- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=2$ حيث $f(2)=\dfrac{5}{-1}=-5$ .

٢- النهاية للدالة $f(x)$ موجودة عند النقطة $x=2$ حيث $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-3}=-5$

٣- قيمة الدالة $f(x)$ تساوي قيمة النهاية عند النقطة $x=2$ بمعني

$$f(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x-3}=-5$$

وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$ بينما الدالة $f(x)$ غير متصلة عند النقطة $x=3$ لان الدالة غير معرفة عند هذه النقطة.

**مثال(٣٦)**

أبحث اتصال الدالة $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$ علي مجموعة الأعداد الحقيقية

الحل

حيث أن الدالة $f(x)$ دالة كسرية وبالتالي فإن الدالة متصلة لجميع قيم الأعداد الحقيقية عدا أصفار المقام

$$x^2-9=(x-3)(x+3)=0\Rightarrow x=3 \quad or \quad x=-3$$

الدالة متصلة علي جميع الإعداد الحقيقية عدا النقطتين $x=-3$ , $x=3$ .

**مثال(٣٧)**

أبحث اتصال الدالة

$$f(x)=\begin{cases}x-3 & x\le 3\\ \frac{1}{x-3} & x>3\end{cases}$$

عند النقطة $x=3$ .

الحل

١- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=3$ حيث $f(3)=3-3=0$ .

٢- واضح من تعريف الدالة أن قاعدة تعريفها تتغير عند النقطة $x=3$ أي أن الدالة يتغير سلوكها حول النقطة $x=3$ ولذلك يلزم حساب النهاية اليسري واليمني

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}(x-3)=3-3=0,$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{0}=\infty,$$

وكما هو ملاحظ فإن قيمه النهاية اليسري موجودة ولكن النهاية اليمني غير موجودة وبالتالي فإن النهاية غير موجودة إذن الدالة غير متصلة.

لاحظ أن قيمة النهاية اليسري للدالة تساوي قيمة الدالة عند النقطة $x=3$ ولذلك فإن الدالة متصلة من جهة اليسار.

**مثال(٣٨)**

أبحث اتصال الدالة

$$f(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ -2 & x\le 0\end{cases}$$

عند النقطة $x=0$ .

الحل

١- الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=0$ حيث $f(0)=-2$ .

٢- واضح من تعريف الدالة أن قاعدة تعريفها تتغير عند النقطة $x=0$ أي أن الدالة يتغير سلوكها حول النقطة $x=0$ ولذلك يلزم حساب النهاية اليسري واليمني

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}(-2)=-2,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} 2=2$$

وكما هو ملاحظ فإن قيمة النهاية اليسري موجودة ولكن لا تساوي قيمة النهاية اليمني عند النقطة $x=0$ وبالتالي فإن النهاية غير موجودة. إذن الدالة غير متصلة عند النقطة $x=0$

لاحظ أن قيمة النهاية اليسري للدالة عند النقطة $x=0$ تساوي قيمة الدالة عند النقطة $x=0$ ولذلك فإن الدالة متصلة من جهة اليسار.

**مثال(٣٩)**

أبحث اتصال الدالة

$$f(x)=\begin{cases}x^2+4 & x\le -1\\ 6+x & x>-1\end{cases}$$

عند النقطة $x=-1$ .

الحل

١- نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=-1$ و هي $f(-1)=5$ .

٢- واضح من تعريف الدالة أن قاعدة تعريفها تتغير عند النقطة $x=-1$ أي أن الدالة يتغير سلوكها حول النقطة $x=-1$ و لذلك يلزم حساب النهاية اليسري واليمني

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}(x^2+4)=5,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}(6+x)=5,$$

كما هو ملاحظ فإن قيمة النهاية اليسري موجودة و تساوي قيمة النهاية اليمني عند النقطة $x=-1$ وبالتالي فإن النهاية موجودة $\lim_{x\to -1} f(x)=5$ . وحيث أن

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)=5$$

إذن الدالة متصلة عند النقطة $x=-1$ .

**مثال(٤٠)**

أبحث اتصال الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\dfrac{|x|}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

عند النقطة $x=0$ .

الحل

من تعريف دالة المقياس إذا كانت $x>0$ فإن $|x|=x$ وتكون $f(x)=x^2+1$

بينما إذا كانت $x<0$ فإن $|x|=-x$ وتكون $f(x)=x^2-1$ أي أن

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 1 & x=0 \\ x^2-1 & x<0 \end{cases}$$

والآن نبحث اتصال الدالة عند النقطة $x=0$

١- $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=0$ حيث $f(0)=1$ .

٢- واضح من تعريف الدالة أن قاعدة تعريفها تتغير عند النقطة $x=0$ أي أن الدالة يتغير سلوكها حول النقطة $x=0$ ولذلك يلزم حساب النهاية اليسري واليمني

# تمارين

١- أوجد قيمة النهايات الآتية

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+5)$

(2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(3) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$

(4) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-6}{x+2}$

(5) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$

(6) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(7) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(8) $\lim_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^5-9\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^4-4x}{x^2-2x}$

(10) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

(11) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-1}$

(12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(4x)}{x}$

(12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(3x)}{\sin(4x)}$

(13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(5x)}{x}$

(14) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x+\tan(x)}{\sin(x)+x^2}$

(15) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(5x)}{x\cos x}$

(16) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

(17) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

(٢) إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x>1\\ x-2 & x<1\end{cases}$$

أوجد $\lim_{x\to 1} f(x)$

(٣) إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة

$$f(x)=|x|+1$$

أوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$

(٤) أوجد قيمة النهايات الآتية

(i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+2}{3x^2-2x+5}$ (ii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3-27}{x^2-3x}$

(iii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x+2}{3x^2+x-6}$ (iv) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x+2}{5x^2+5x+1}$

(٥) أبحث اتصال الدوال الآتية عند قيم $x_0$ المناظرة لكل الدوال

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x+3}, \quad x_0=-3$

(b) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}, \quad x_0=1$

(c) $f(x)=|x|-1, \quad x_0=0$

(d) $f(x)=|x+1|-2, \quad x_0=-1$

(e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} & x\neq 3 \\ 5 & x=3 \end{cases}, \quad x_0=3$

(f) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x<2 \\ x^2-1 & x\geq 2 \end{cases}, \quad x_0=2$

(h) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ 7 & x=0 \\ 3x-4 & x<0 \end{cases}, \quad x_0=0$

٦- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3 \\ k & x=3 \end{cases}$$

أوجد قيمة $k$ التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x=3$ .

٧- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة بالصورة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+1} & x\neq -1\\ \\ k & x=-1\end{cases}$$

أوجد قيمة $k$ التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x=-1$ .