

الباب الأول

مفاهيم أساسية

١- مقدمة :

تعريف

المعادلة التفاضلية هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن $y(x)$ وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية $y', y'', \dots$ أي أنها على الصورة العامة :

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية .

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x, y مستقلان ، وكان $z(x, y)$ ، متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x, y جزئياً ، سميت المعادلة المشتمة على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية ، معادلة تفاضلية جزئية ، وهي على الصورة :

$$G(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية :

$$y''^2 + 2y^3 - 5y = \sin x \quad (1)$$

$$y' + xy = x^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x \quad (3)$$

نلاحظ أن المعادلتين (1)، (2) كلاً منهما معادلة تفاضلية عادية بينما المعادلة (3) معادلة تفاضلية جزئية .

تعريف :

رتبة المعادلة Order : هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة .

درجة المعادلة Degree : هي درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوى الكسرية .

مثال :

من مجموعة المعادلات التفاضلية السابقة نجد أن المعادلة (1) من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية بينما المعادلة (2) من الرتبة الأولى والدرجة الأولى ، أما المعادلة (3) فهي تفاضلية جزئية (ليست محل دراستنا) وهي من الرتبة الثانية والدرجة الأولى .

مثال :

أوجد رتبة ودرجة المعادلة $y'' = (5 - 2y')^{\frac{3}{2}} = 0$.

الحل :

المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية لماذا ؟

تعريف :

حل المعادلة التفاضلية Solution of D.E. : تسمى الدالة $y = y(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ إذا كانت :

(١) قابلة للاشتقاق n مرة .

(٢) تحقق المعادلة التفاضلية أي : $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

مثال :

أثبت أن $y(x) = c \sin x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$ حيث c ثابت .

الحل :

$$y(x) = c \sin x,$$

$$y'(x) = c \cos x,$$

$$y''(x) = -c \sin x$$

وعلى ذلك نجد أن :

$$y''(x) + y(x) = -c \sin x + c \sin x = 0$$

٢- الحل العام والحل الخاص *General Solution and Particular Solution* :

الحل العام لمعادل تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوى على n من الثوابت الاختيارية وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية .

أما الحل الخاص هو أى حل يحقق المعادلة التفاضلية لايشتمل على أى ثابت اختيارية وقد نحصل عليه أحياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية فى الحل العام بقيم محددة .

مثال :

الحل العام للمعادلة $y''' - 5y' + 6y = 0$ يكون $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$ حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ونجد أن بعض الحلول الخاصة على الصور :

$$y = e^{2x} + e^{3x}$$

$$y = 3 + 5e^{2x^2}$$

$$y = 5 - 2e^{3x}$$

٣- تكوين المعادلة التفاضلية (حذف الثوابت) :

إذا أعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n ، نجد أن ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة :

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (I)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت اختيارية ، وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطى نجرى n من المشتقات للمعادلة (I) .

يكون لدينا $n+1$ من المعادلات عبارة عن المعادلة (I) بالإضافة إلى n معادلة من العمليات التفاضلية التي عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة .

مثال :

$$y = c \sin x \quad (1) \quad \text{أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام}$$

الحل :

نفاضل مرة واحدة

$$y' = c \cos x \quad (2)$$

نحذف c من المعادلتين (2) ، (1) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي :

$$y' = y \cot x$$

حل آخر :

يمكن لحذف c من (2) ، (1) نستخدم المحدد :

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y \cos x - y' \sin x = 0$$

$$\therefore y' = y \cot x$$

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام :

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} \dots\dots\dots (1)$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .الحل :

بتفاضل (1) مرتين :

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x} \dots\dots\dots (2)$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + 9c_2 e^{3x} \dots\dots\dots (3)$$

لحذف c_1, c_2 :

$$\begin{vmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow y(18-12) - y(9-4) + y'(3-2) = 0$$

$$\therefore y'' - 5y' + 6y = 0$$

مثال :

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام :

$$y = c_1 + c_2 x + x^2$$

الحل :

نضع الحل العام على الصورة :

$$y - x^2 = c_1 + c_2 x$$

ونفاضل هذا الحل مرتين ثم نحذف c_1, c_2 فنحصل على :

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هي :

$$\therefore y'' - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = 2$$

أمثلة محلولة وتمارينمثال 1

اكمل الجدول الآتي:

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
(i) $y''' - 3xy' + y = e^x + 1$	3.....	1.....
(ii) $ty'' + ty' + \cos y = 1 + t^2$	2.....	1.....
(iii) $x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5 - x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y = 0$	2.....	5.....
(iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - xy^2 + 3y = 0$		
(v) $5y^{(4)} - 5x + 1 = 0$		
(vi) $(y''')^2 + (y')^5 - 2xy = 0$		

مثال 2

كون المعادلة التفاضلية التي حلها العام:

$$y = A\cos 5x + B\sin 5x$$

حيث A,B ثوابت اختيارية.

الحل

$$y = A\cos 5x + B\sin 5x$$

(1)

بالاشتقاق مرتين نحصل علي

$$y' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$$

$$y'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x = -25(A\cos 5x + B\sin 5x) = -25y$$

وذلك باستخدام (1). إذن المعادل المطلوبة هي

$$y'' + 25y = 0$$

وهي معادلة من الرتبة الثانية الدرجة الأولى. وهي تمثل حركة توافقية بسيطة.

مثال 3

كون المعادلة التفاضلية التي حلها العام:

$$y = A\cos(\omega t + B)$$

حيث A,B ثوابت اختيارية.

الحل

$$y = A\cos(\omega t + B)$$

(*)

بالاشتقاق مرتين نحصل علي

$$y' = -\omega A\sin(\omega t + B)$$

$$y'' = -\omega^2 A \cos(\omega t + B) = -\omega^2 y$$

وذلك باستخدام (*). إذن المعادل المطلوبة هي

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

وهي معادلة من الرتبة الثانية الدرجة الأولى. وهي تمثل حركة توافقية بسيطة.

مثال 3

اثبت أن العلاقة $y = 2e^{-x} + xe^{-x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 2y' + y = 0$.

الحل

بالاشتقاق مرتين والتعويض نحصل على:

$$y' = -2e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = -e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y'' = e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = xe^{-x}$$

اذن

$$y'' + 2y' + y = xe^{-x} - 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x} + xe^{-x} = 0$$

تمرين 4

بين أن العلاقة $y = \ln x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $xy'' + y' = 0$ على الفترة $(0, \infty)$ فقط.

نسأل الله التوفيق والسداد.

حلول تمارين الاسبوع الرابع

1- اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(i) \quad (x - 1)dy + (y - 2)dx = 0$$

$$(ii) \quad y' + 2x\sqrt{1 - y^2} = 0$$

$$(iii) \quad (1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0$$

الحل

واضح ان جميع هذه المعادلات من الدرجة الاولى الرتبة الاولى ايضا جميعها قابل للفصل كالاتي:

$$(i) \quad (x - 1)dy + (y - 2)dx = 0$$

بالقسمة على

$$(x - 1)(y - 2)$$

نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{dy}{(y - 2)} + \frac{dx}{(x - 1)} &= 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{(y - 2)} + \int \frac{dx}{(x - 1)} = \ln c \\ &\Rightarrow \ln(y - 2) + \ln(x - 1) = \ln c \\ &\Rightarrow \ln[(y - 2)(x - 1)] = \ln c \\ &\Rightarrow (y - 2)(x - 1) = c \end{aligned}$$

$$(ii) \quad y' + 2x\sqrt{1 - y^2} = 0$$

بفصل المتغيرات نحصل على

$$\begin{aligned} y' + 2x\sqrt{1 - y^2} &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + 2x\sqrt{1 - y^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} + 2xdx = 0 \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} + \int 2xdx = c \end{aligned}$$

حلول تمارين الاسبوع الرابع

$$\Rightarrow \sin^{-1}y + x = c.$$

$$(iii) (1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx = 0$$

بفصل المتغيرات نحصل علي

$$\begin{aligned}(1 + x^2)dy + (1 + y^2)dx &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{(1 + y^2)} + \frac{dx}{(1 + x^2)} &= 0 \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{(1 + y^2)} + \int \frac{dx}{(1 + x^2)} &= c \\ \Rightarrow \tan^{-1}x + \tan^{-1}y &= c\end{aligned}$$

1- اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(iv) y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

$$(v) xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2}$$

$$(vi) y' = \frac{x+y}{x-y}$$

الحل

واضح ان جميع هذه المعادلات متجانسة:

$$(iv) y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

نقوم بالقسمة علي

x

ونستخدم التعويضات الآتية:

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v + xv'$$

حلول تمارين الاسبوع الرابع

تصبح المعادلة

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \Rightarrow v + xv' = v + \frac{1}{v} \Rightarrow xv' = \frac{1}{v}$$

وبفصل المتغيرات نحصل علي

$$\begin{aligned} xv' = \frac{1}{v} &\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{v} \\ &\Rightarrow \ln x = \ln v + \ln c \Rightarrow \ln x = \ln vc \\ &\Rightarrow x = vc \Rightarrow \frac{x}{c} = v \Rightarrow \frac{x}{c} = \frac{y}{x} \\ &\Rightarrow y = \frac{1}{c} x^2 \end{aligned}$$

$$(v) \quad xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2}$$

الحل

بالقسمة علي

x

نجد ان

$$xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

ونستخدم التعويضات الآتية:

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v + xv'$$

نحصل علي

حلول تمارين الاسبوع الرابع

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow v + xv' = v + \sqrt{4 + (v)^2}$$

$$\Rightarrow xv' = \sqrt{4 + (v)^2} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \sqrt{4 + v^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{4 + v^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{\sqrt{4 + v^2}}$$

$$\Rightarrow \ln x = \sinh^{-1} \left(\frac{v}{2} \right) + c$$

$$\Rightarrow \ln x = \sinh^{-1} \left(\frac{y}{2x} \right) + c \Rightarrow$$

$$(vi) \quad y' = \frac{x + y}{x - y}$$

الحل

نقوم بالقسمة علي

x

ونستخدم التعويضات الآتية:

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v + xv'$$

تصبح المعادلة

حلول تمارين الاسبوع الرابع

$$\begin{aligned}y' = \frac{x+y}{x-y} &\Rightarrow y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)} \\&\Rightarrow v + xv' = \frac{1+v}{1-v} \\&\Rightarrow xv' = \frac{1+v}{1-v} - v \\&\Rightarrow xv' = \frac{1+v-v+v^2}{1-v} \\&\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v} \\&\Rightarrow \frac{dx}{x} = \left(\frac{1-v}{1+v^2}\right) dv \\&\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{1+v^2} - \frac{v dv}{1+v^2} \\&\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{1+v^2} - \int \frac{v dv}{1+v^2} \\&\Rightarrow \ln x = \tan^{-1} v - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) \\&\Rightarrow \ln x = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)\end{aligned}$$

الفصل الثاني

معادلات تفاضلية

من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

مقدمة :

أى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تكون على الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad \text{أو}$$

ولحل مثل هذه المعادلة نستخدم إحدى الطرق التالية المتاحة :

١ - طريقة فصل المتغيرات *Separation of Variables* :

إذا أمكن وضع المعادلة على الصورة

$$f(x) dx + g(y) dy = 0$$

حيث أن $f(x)$ دالة فى x فقط و $g(y)$ دالة فى y وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل ، نستخدم التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C$$

حيث C ثابت اختياري ، ويسمى ذلك الحل بالحل العام ، ويمكن وضع الثابت الاختياري على أى صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي ، نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلاً خاصاً .

أمثلةمثال 1

أوجد الحل العام والمنحنى الخاص الذي يمر بالنقطة $(0,0)$ للمعادلة التفاضلية .

$$e^x \cos y \, dx + (1 + e^x) \sin y \, dy = 0$$

الحل :

بفصل المتغيرات ، وذلك بقسمة طرفي المعادلة المعطاة على $\cos y (1 + e^x)$ فنحصل على :

$$\therefore \frac{e^x}{1+e^x} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = 0$$

$$\therefore \ln(1 + e^x) - \ln |\cos y| = \ln c$$

بالتكامل المباشر

$$\therefore \ln \frac{(1 + e^x)}{|\cos y|} = \ln c$$

$$1 + e^x = c |\cos y|$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة هو :

بالتعويض عن $x = 0, y = 0$

$$\therefore 1 + 1 = c \quad \text{و} \quad c = 2$$

$$1 + e^x = 2 |\cos y|$$

ويكون الحل الخاص

مثال 2

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y' + e^x y = e^x y^2$$

الحل :

$$y' = e^x (y^2 - y)$$

نكتب المعادلة على الصورة

$$e^x dx = \frac{1}{y(y-1)} dy$$

ثم بفصل المتغيرات نحصل على :

$$e^x dx = \left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right] dy$$

وباستخدام الكسور الجزئية نجد أن :

$$-e^x = \ln |y-1| - \ln |y| + c$$

ثم بالتكامل المباشر نحصل على :

وهو الحل العام ...

مثال 3

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

حيث $y(0) = -1$

الحل

حيث أنه أضيف الشرط $y(0) = -1$ لذلك فإن المطلوب هو الحل الوحيد الذي يحقق بالشرط وسوف نحصل أولاً على الحل العام ومنه نوجد الحل الوحيد لذلك نكتب المعادلة كالاتي:

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx$$

وبإجراء تكامل الطرفين فإن:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

حيث c ثابت اختياري وهذا هو الحل العام للمعادلة التفاضلية. ولإيجاد الحل الوحيد نعوض بالشروط $y(0) = -1$ في الحل العام فإن:

$$1 + 2 = c = 3$$

ويكون الحل الوحيد هو:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

مثال 4

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}$$

الحل

بفصل المتغيرات في المعادلة المعطاة يكون:

$$\left(\frac{1 + 2y^2}{y} \right) dy = \cos x dx$$

وبإجراء تكامل الطرفين يكون:

$$\ln|y| + y^2 = \sin x + c$$

وهذا هو الحل العام.

تمارين

أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

(i) $(x - 1)dy + (y - 2)dx = 0$

(ii) $y' + 2x\sqrt{1 - y^2} = 0$

(iii) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$

٢- المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Equation

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$$

متجانسة إذا كان كل من M, N دالة متجانسة من نفس الدرجة ، علماً بأن :

$f(x,y)$ دالة متجانسة من درجة n إذا كان :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \quad , \lambda \in R$$

ومثال ذلك :

$$1) f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2 \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + 3\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2 = \lambda^2 f(x,y)$$

$\therefore f(x,y)$ متجانسة من درجة 2 .

$$2) f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}} \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\sqrt{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^{3/2} f(x,y)$$

$\therefore f(x,y)$ متجانسة من درجة $3/2$.

على ذلك فإن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن أن توضع على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(x,y)$$

وحيث أن M, N متجانسة من نفس الدرجة نجد أن $f(x,y)$ متجانسة من درجة صفر .

أى أن من الممكن $f(x,y) = f(x/y)$.

الخلاصة :

المعادلة التفاضلية $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$ تكون متجانسة إذا كانت كل من M, N متجانسة من نفس الدرجة .

أى أن المعادلة على الصورة $y' = f(x/y)$ تكون معادلة متجانسة .

فى هذه الحالة نستخدم التعويض $\frac{y}{x} = v$ أى $y = xv$ وبالتالى $dy = x dv + v dx$ ثم تتحول المعادلة إلى معادلة يمكن فصل متغيراتها ، ثم تحل كما سبق .

أمثلة

مثال 1

أوجد الحل العام للمعادلة : $(x^2 + y^2) dx - 2xy dy = 0$

الحل :

من الواضح أن المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية

∴ نستخدم التعويض $y = vx$ $\Leftrightarrow dy = vdx + xdv$

$$\therefore (x^2 + v^2 x^2) dx - 2x^2 v (vdx + xdv) = 0$$

∴ بالقسمة على x^2 نحصل على :

$$(1 + v^2) dx - 2v (v dx + x dv) = 0$$

$$\therefore [1 + v^2 - 2v^2] dx - 2v x dv = 0$$

أى أن

$$\therefore (1 - v^2) dx - 2v x dv = 0$$

أى

$$\frac{1}{x} dx - \frac{2v}{1 - v^2} dv = 0$$

وبفضل المتغيرات نحصل على

$$\ln x + \ln (1 - v^2) = \ln c$$

∴ بالتكامل المباشر

حيث أن : $v = \frac{y}{x}$

$$\therefore x \left[1 - \frac{y^2}{x^2} \right] = c$$

$$x^2 - y^2 = cx$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال 2

أوجد الحل العام للمعادلة:

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

الحل

نفرض أن $v = \frac{y}{x}$ ومنها $y' = v + x \frac{dv}{dx}$ بالتعويض في المعادلة فإن:

$$\begin{aligned} v + x \frac{dv}{dx} &= \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)}{1} \\ &= v^2 + 2v \end{aligned}$$

$$x \frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

$$\therefore \frac{dx}{x} = \frac{dv}{v(v+1)} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \right) dv$$

وبإجراء تكامل الطرفين، نحصل على:

$$\ln x = \ln v - \ln(v + 1) + \ln c$$

$$\ln x = \ln \frac{cv}{v + 1}$$

$$\therefore \frac{cv}{v + 1} = x$$

$$\therefore \frac{c\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right) + 1} = x$$

$$\therefore cy = x(y + x)$$

$$y = \frac{x^2}{c - x}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال 3

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:-

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

الحل

حيث أن المعادلة متجانسة ، نضع $y = vx \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right) = v$

$$\therefore y' = v + xv'$$

$$\therefore v + xv' = f(v) \rightarrow xv' = f(v) - v$$

$$x \frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

أى أن

$$\therefore \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \ln cx$$

أى أن الحل العام

$$v = \frac{y}{x} \quad \text{حيث}$$

مثال 4

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$(y - x) dx - x dy = 0$$

الحل

واضح ان المعادلة متجانسة من الدرجة الاولى. يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$y' = \frac{y - x}{x} = \left(\frac{y}{x}\right) - 1 \quad (*)$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow y' = v + xv'$$

وبالتعويض في المعادلة (*) نجد ان المعادلة تأخذ الصورة

$$v + xv' = v - 1$$

ومنها

$$xv' = -1 \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = -1$$

وبفصل المتغيرات نحصل علي

$$\frac{dx}{x} = -dv \Rightarrow \frac{dx}{x} + dv = 0$$

وباجراء التكامل نحصل علي:

$$\int \frac{dx}{x} + \int dv = c$$

$$\Rightarrow \ln|x| + v = c \Rightarrow \ln|x| + \frac{y}{x} = c \Rightarrow y = cx - x \ln|x|$$

تمارين

اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الاتية:

(i) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

(ii) $xy' = y + \sqrt{4x^2 + y^2}$

(iii) $y' = \frac{x+y}{x-y}$

نسأل الله التوفيق والسداد.

4-معادلات تفاضلية يمكن تحويلها الى معادلة متجانسة

تكون هذه المعادلات التفاضلية العادية على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} \quad (1)$$

حيث $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت :

إذا كان $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة التفاضلية (1) تؤول إلى المعادلة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 + b_1 y}{a_2 x + b_2 y} \quad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة حيث أن كل من دالتى البسط والمقام متجانسة من الدرجة الأولى وفى هذه الحالة يمكن حل المعادلة (2) كما فى البند السابق .

لحل المعادلة التفاضلية العادية (1) فإننا نبحث فيما إذا كان الخطان المستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (3)$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

يتقاطعان أم لا يتقاطعان .

ولذلك سنناقش الحالتين كل على حدة .

الحالة الأولى :

إذا كان المستقيمان متقاطعان :

يتقاطع المستقيمان

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

إذا كان :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{or} \quad a_1 b_2 = b_1 a_2$$

بافتراض أن نقطة تقاطع المستقيمان هي (h, k) فإننا نستخدم التعويض

$$y = v + k, \quad x = u + h$$

$$\text{حيث } h, k \text{ ثوابت وعلى ذلك فإن } \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) فإننا نحصل على :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v + (a_1 h + b_1 k + c_1)}{a_2 u + b_2 v + (a_2 h + b_2 k + c_2)} \quad (4)$$

وحيث أن (h, k) نقطة تقاطع المستقيمان (3) ، أي أنها تقع على كل منهما وعليه فإن :

$$a_1 h + b_1 k + c_1 = 0$$

$$a_2 h + b_2 k + c_2 = 0$$

وعلى هذا فإن المعادلة التفاضلية (4) تأخذ الصورة :

$$\frac{dv}{du} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v} \quad (5)$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة في المتغيرين u, v ويمكن حلها كما سبق وذلك باستخدام

التعويض $v = zu$ فتتحول المعادلة التفاضلية (5) إلى معادلة تفاضلية تحل بفصل المتغيرات

ثم نستخدم التعويض $z = \frac{v}{u}$ ثم نعوض بعد ذلك عن كل من u, v حيث $u = x - h, v = y - k$

فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية (1) .

أمثلةمثال 1

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 3}{x + y - 2}$

الحل :

واضح أن المستقيمان

$$2x + y - 3 = 0$$

$$x + y - 2 = 0$$

مقاطعان وبحل هاتين المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هي $(1,1)$ نستخدم التعويض :

$$x = u + 1$$

$$y = v + 1$$

ومنها نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{2(u+1) + (v+1) - 3}{u+1 + v+1 - 2} \\ &= \frac{2u + v}{u + v} \end{aligned}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة في u, v نستخدم التعويض $v = uz$ ومنها :

$$\frac{dv}{du} = v \frac{dz}{du} + z$$

وبالتعويض نجد أن :

$$u \frac{dz}{du} + z = \frac{2u + uz}{u + uz} \Rightarrow u \frac{dz}{du} + z = \frac{2 + z}{1 + z}$$

إذن :

$$\begin{aligned} u \frac{dz}{du} &= \frac{2+z}{1+z} \\ &= \frac{2+z-z+z^2}{1+z} = \frac{2-z^2}{1+z} \end{aligned}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{1+z}{2-z^2} dz = \frac{du}{u} \quad (5)$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\begin{aligned} \int \frac{1+z}{2-z^2} dz &= \int \frac{du}{u} \\ \Rightarrow \int \frac{dz}{2-z^2} + \int \frac{z}{2-z^2} dz &= \ln|u| + c_1 \end{aligned}$$

حيث c_1 ثابت اختياري .

بالنسبة للتكامل $\int \frac{z}{2-z^2} dz$ نجد أن :

$$\int \frac{z}{2-z^2} dz = -\frac{1}{2} \ln|2-z^2| + c_2$$

وبالنسبة للتكامل $\int \frac{dz}{2-z^2}$ باستخدام الكسور الجزئية فإننا نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-z^2} &= \frac{1}{(\sqrt{2}-z)(\sqrt{2}+z)} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}-z} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}+z} \end{aligned}$$

ومنها :

$$\begin{aligned}\int \frac{dz}{2-z^2} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}-z} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \int \frac{dz}{\sqrt{2}+z} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}-z| + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}+z| + c_3\end{aligned}$$

مما سبق نجد أن الحل العام للمعادلة (5) هو :

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}-z| + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln|\sqrt{2}+z| - \frac{1}{2} \ln|2-z^2| = \ln|u| + c$$

حيث $c = c_1 + c_2 + c_3$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \frac{u}{v}}{\sqrt{2} - \frac{v}{u}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 2 - \frac{v^2}{u^2} \right| = \ln|u| + c \quad \text{ولكن } z = \frac{v}{u} \text{ فيكون الحل العام هو :}$$

ولكن $u=x-1, v=y-1$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \ln \left| \frac{\sqrt{2}(x-1)+y-1}{\sqrt{2}(x-1)-y+1} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2(x-1)^2 - (y-1)^2}{(y-1)^2} \right| = \ln|x-1| + c$$

مثال 2

مثال :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

الحل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$x+y-3=0$$

$$x-y-1=0$$

متقاطعان ، وبحل المعادلتين نجد أن نقطة التقاطع هي $(2, 1)$ نستخدم التعويض :

$$x = u + 2, \quad y = v - 1$$

ومنها $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ وبالتعويض في المعادلة المعطاة نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{u+2+v+1-3}{u+2-v-1-1} \\ \Rightarrow \frac{dv}{du} &= \frac{u+v}{u-v} \end{aligned}$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة في u, v نستخدم التعويض $v = uz$.

$$\frac{dv}{du} = u \frac{dz}{du} + z \quad \text{ومنها :}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$\begin{aligned} u \frac{dz}{du} + z &= \frac{u+uz}{u-uz} = \frac{1+z}{1-z} \\ \Rightarrow u \frac{dz}{du} &= \frac{1+z}{1-z} - z = \frac{1+z-z+z^2}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z} \end{aligned}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{du}{u} \quad \text{وبفصل المتغيرات نجد أن :}$$

وبالتكامل نجد أن :

$$\int \frac{dz}{1+z^2} - \int \frac{z dz}{1+z^2} = \int \frac{du}{u} + c$$

حيث c ثبات اختياري ومنها :

$$\tan^{-1} = -\frac{1}{2} \ln |1+z^2| = \ln |u| + c$$

ولكن $z = \frac{v}{u}$ فيكون الحل هو :

$$\tan^{-1} \frac{v}{u} - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{v}{u} \right)^2 \right| = \ln |u| + c$$

ولكن $u = x-2$, $v = y-1$:

فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\tan^{-1} \frac{y-1}{x-2} - \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \left(\frac{y-1}{x-2} \right)^2 \right| = \ln |x-2| + c$$

الحالة الثانية :

إذا كان المستقيمان متوازيان ، فإننا نفترض أن المستقيمان (3) متوازيان فإن شرط التوازي هو :

$$a_1 b_2 = a_2 b_1$$

وفي هذه الحالة نستخدم التعويض :

$$z = a_1 x + b_1 y \quad \text{or} \quad z = a_2 x + b_2 y$$

أيهما أكثر سهولة في هذه الحالة بعد التعويض تتحول المعادلة التفاضلية العادية (1) إلى معادلة تفاضلية تحل بطريقة فصل المتغيرات والذي سنوضحه في الأمثلة المحولة الآتية :

مثال 3

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-5}{x+y+1}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

الحل :

نلاحظ أن المستقيمان :

$$\begin{aligned} x+y-5 &= 0 \\ x+y+1 &= 0 \end{aligned}$$

متوازيين . نستخدم التعويض :

$$z = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} - 1 &= \frac{z-5}{z+1} \\ \Rightarrow \frac{dz}{dx} &= \frac{z-5}{z+1} + 1 = \frac{2z-4}{z+1} \end{aligned}$$

وبفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\begin{aligned} \int \frac{z+1}{2z-4} dz &= \int dx + c \\ \Rightarrow \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \ln|z-2| &= x + c \end{aligned}$$

ولكن $z = x + y$ فيكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو :

$$\frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{2} \ln|x=y-2| = x + c$$

حيث c ثابت اختياري .

مثال 4

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :

الحل :

$$2x + y - 1 = 0$$

نلاحظ أن المستقيمان

$$4x + 2y + 5 = 0$$

متوازيان ، نستخدم التعويض :

$$z = 2x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z-1}{2z+5}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{2z+5} + 2 = \frac{5z+9}{2z+5}$$

بفصل المتغيرات والتكامل نجد أن :

$$\int \frac{2z+5}{5z+9} dz = \int dx + c$$

ومنها :

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z+9| = x + c$$

ولكن $z = 2x + y$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو :

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25} \ln|10x+5y+9| = x + c$$

حيث c ثابت اختياري .

5-المعادلات التفاضلية التامة:

يُقال علي ان المعادلة التفاضلية

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

تامة اذا تحقق الشرط الاتي:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ويكون الحل العام علي صورة

$$C = \int M(x, y)dx + \int N(x, y)dy \quad (**) \quad \text{نختار الحدود الخالية من } x$$

أمثلة

مثال 5

أوجد حل للمعادلة :

$$(6x^2 + 4xy + y^2) dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2) dy = 0$$

الحل :

$$M(x,y) = 6x^2 + 4xy + y^2$$

نفترض أن :

$$N(x,y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y$$

نوجد

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ أى أن}$$

أي ان المعادلة تامة ومن القاعدة (*) يكون الحل العام

$$\begin{aligned} C &= \int (6x^2 + 4xy + y^2) dx + \int (2xy - 3y^2) dy \\ &= \frac{6}{3} x^3 + \frac{4}{2} yx^2 + y^2 x + \frac{2}{2} xy^2 - \frac{3}{3} y^3 \\ &= 2x^3 + 2yx^2 + y^2 x + xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

مثال 6

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$e^x \sin y dx + e^x \cos y dy = 0$$

الحل

بما ان المعادلة من الدرجة الاولى الرتبة الاولى. لذلك نفرض ان

$$M(x, y) = e^x \sin y, \quad N(x, y) = e^x \cos y$$

نوجد

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cos y$$

اي ان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة ومن القانون (*) يكون الحل العام

$$C = \int e^x \sin y dx = e^x \sin y$$

لاحظ:

- في المثال السابق تم اهمال الحد المحتوي على N في القانون (*) لانه لا توجد حدود خالية من

المتغير x.

-يمكن حل المثال السابق بطريقة فصل المتغيرات (تأكد من ذلك)

مثال 7

برهن ان المعادلة التفاضلية الاتية تامة ومن ثم اوجد حلها العام

$$(3x^2 + 4xy^2)dx + (2y - 3y^2 + 4yx^2)dy = 0$$

الحل

بما ان المعادلة من الدرجة الاولى الرتبة الاولى. لذلك نفرض ان

$$M(x, y) = 3x^2 + 4xy^2, \quad N(x, y) = 2y - 3y^2 + 4yx^2$$

نوجد

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 8xy$$

اي ان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة ومن القانون (*) يكون الحل العام

$$C = \int (3x^2 + 4xy^2) dx + \int (2y - 3y^2) dy = x^3 + 2x^2y^2 + y^2 - y^3$$

المعادلات التفاضلية غير التامة:

اذا كان

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فان المعادلة التفاضلية (1) تكون غير تامة ولحلها نوجد العامل المكامل. سنتطرق هنا الي حالتين فقط للعامل المكامل كالاتي:

الحالة الاولى: عندما يكون عامل التكامل دالة في x نطبق القانون

$$I(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} \quad (2)$$

الحالة الثانية: عندما يكون عامل التكامل دالة في y نطبق القانون

$$I(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy} \quad (3)$$

حيث

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وبضرب المعادلة التفاضلية (1) في العامل المُكامل تصبح المعادلة تامة ونُكمل حلها كما في الامثلة السابقة.

لاحظ: تحديد اختيار العامل المكامل (2) او (3) بناء على الدالة الناتجة وسهولة التعامل معها في التكامل.

لاحظ: القانون (*) لا يصلح لحل جميع المسائل ولكن وضع هنا لسهولة في بعض المسائل لذلك يمكن الحل بالقانون الاتي:

$$C = \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y) dy \right) dx$$

وهو يصلح لجميع المسائل من هذا النوع.

أمثلة

مثال 8

أوجد حل المعادلة :

$$(3x^3 + 2y)dx + (2x \ln 3x + \frac{3x}{y})dy = 0$$

الحل :

نفترض $M = 3x^3 + 2y$ ، $N = 2x \ln 3x + \frac{3x}{y}$ فيكون :

$$M_y = 2 \quad , \quad N_x = 2 + 2 \ln 3x + \frac{3}{y}$$

وحيث ان

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة ليست تامة. نوجد العامل المكامل:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{(2 \ln 3x + \frac{3}{y})}{x(2 \ln 3x + \frac{3}{y})} = -\frac{1}{x} = p(x)$$

∴ يكون عامل التكامل :

$$I(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

بضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{x}$ تصبح تامة على الصورة

$$(3x^2 + \frac{2y}{x})dx + (2 \ln 3x + \frac{3}{y})dy = 0$$

$$M = 3x^2 + \frac{2y}{x}, \quad N = 2 \ln 3x + \frac{3}{y} \quad \text{بافتراض أن :}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2}{x}$$

اي ان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة. نستخدم القانون

$$C = \int M(x, y)dx + \int N(x, y)dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)dy \right) dx \quad (**)$$

وحيث ان

$$\int N(x, y)dy = \int \left(2 \ln 3x + \frac{3}{y} \right) dy = 2y \ln 3x + 3 \ln y,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)dy = \frac{\partial}{\partial x} (2y \ln 3x + 3 \ln y) = \frac{2y}{x}$$

$$\int \left(\frac{\partial}{\partial x} \int N(x, y)dy \right) dx = \int \left(\frac{2y}{x} \right) dx = 2y \ln x$$

ومن القانون (**) نجد ان

$$C = \int \left(3x^2 + \frac{2y}{x} \right) dx + \int \left(2\ln 3x + \frac{3}{y} \right) dy - 2y \ln x$$

$$= x^3 + 2y \ln x + 2y \ln 3x + 3 \ln y - 2y \ln x = x^3 + 2y \ln 3x + 3 \ln y$$

حيث C ثابت اختياري .
 لاحظ يمكن حل الامثلة 1-3 بنفس القانون (**) وسنحصل علي نفس الناتج.

مثال 9

أوجد الحل العام للمعادلة :

$$y(2x+y) dx + (3x^2 + 4xy - y) dy = 0$$

الحل :

$$M = y(2x + y) , \quad N = 3x^2 + 4xy - y \quad \text{ليكن :}$$

$$M_y = 2x + 2y , \quad N_x = 6x + 4y \quad \text{فإن}$$

$$M_y - N_x = -4x - 2y = -2(2x + y) \neq 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

أي أن المعادلة المعطاة غير تامة .

نوجد عامل التكامل I

نجد أن

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2(2x + y)}{-y(2x + y)} = \frac{2}{y}$$

دالة في y فقط فيكون :

$$I = I(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{\ln y^2} = y^2$$

بضرب طرفي المعادلة في y^2 تصبح تامة على الصورة :

$$y^3 (2x+y) dx + y^2 (3x^2 + 4xy - y) dy = 0$$

$$M = 2xy^3 + y^4, \quad N = 3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3$$

ونفترض أن

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 + 4y^3, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 + 4y^3$$

اي ان

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

اذن المعادلة التفاضلية تامة. نستخدم القانون (*) نجد ان

$$C = \int (2xy^3 + y^4) dx + \int (-y^3) dy = x^2y^3 + y^4x - \frac{1}{4}y^4$$

حيث C ثابت اختياري .

تمارين

(1) اثبت ان المعادلة الاتية تامة واوجد حلها العام

$$(2xy - y)dx + (x^2 - x - y)dy = 0$$

(2) اثبت ان المعادلة الاتية ليست تامة مبينا حلها العام

$$(2y - 4x^2)dx + xdy = 0$$

ملحوظة: يمكن التأكد من الحل بالطريقة الاتية:

- اذا تم تفاضل الحل جزئيا بالنسبة ل x نحصل علي الدالة M
- اذا تم تفاضل الحل جزئيا بالنسبة ل y نحصل علي الدالة N

6-المعادلات التفاضلية الخطية:

تكون المعادلة التفاضلية التي من الرتبة الأولى خطية إذا كانت y' , y من الدرجة الأولى. والصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هي

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \quad (2)$$

حيث Q, P دالتان متصلتان ولهذه المعادلة التفاضلية الخطية أهمية كبيرة في الرياضيات البحتة والتطبيقية. ولحل هذه المعادلة نعيد كتابتها على الصورة

$$dy + (Py - Q)dx = 0$$

$$\varphi(x, y) = Py - Q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = P(x), \quad \psi(x, y) = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = P(x)$$

$$\therefore \frac{1}{\psi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = P(x)$$

وهذه المعادلة غير تامة وعامل المكامل لها دالة في x . بضرب هذه المعادلة في عامل المكامل $\mu = \mu(x)$ فتصبح

$$\mu dy + (\mu Py - \mu Q)dx = 0$$

وتكون هذه المعادلة تامة إذا تحقق الشرط:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (\mu P y - \mu Q) \quad (3)$$

$$\therefore \frac{d \mu}{dx} = \mu P$$

$$\therefore \ln \mu = P \int dx + c \quad (4)$$

ويكون العامل المكامل هو

$$\mu(x) = e^{\int p dx} \quad (5)$$

من المعادلة (٤)، يمكن كتابة المعادلة (1) على الصورة

$$\mu dy + y d \mu = \mu Q$$

$$\frac{d}{dx} (\mu y) = \mu Q \quad \text{ومنها}$$

بالتكامل

$$\mu y = \int \mu Q dx + c \quad (6)$$

وبالتعويض عن $\mu = e^{\int P dx}$ نحصل على الحل العام في الصورة

$$y e^{\int P(x) dx} = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx + c$$

أمثلةمثال 10

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3$$

الحل:

هذه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى عاملها الكامل μ هو

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية هو

$$xy = \int x x^3 dx + c$$

$$xy = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\therefore 5xy = x^5 + a, \quad a = 5c$$

مثال 11

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^4 + 2y)dx - xdy = 0$$

الحل:

نعيد كتابة هذه المعادلة كما يلي

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^3$$

وهي معادلة تفاضلية خطية معاملها المكامل هو

$$\mu = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

والحل العام هو

$$\begin{aligned} y \cdot \frac{1}{x^2} &= \int x^3 \frac{1}{x^2} dx + c \\ &= \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \frac{x^4}{2} + cx^2 \end{aligned}$$

مثال 12

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

أوجد حل المعادلة :

الحل :

المعادلة خطية في y .

نضع المعادلة في الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

أى أن

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x^2$$

$$P(x) = \frac{2}{x}, \quad Q(x) = x^2$$

العامل المكامل

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

فيكون الحل بعد التعويض بالقانون

$$x^2 y = \frac{1}{5} x^5 + c$$

ملحوظة :

١- عند حل المعادلة الخطية وتعيين المعامل المكامل I يجب أن تكون المعادلة على نفسالصورة المعروفة أى معامل $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أو معامل $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ هو الواحد الصحيح .مثال 13

أوجد للحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{2}{y} x = 4y + 3$$

الحل :

المعادلة المعطاة خطية في x حيث :

$$P(y) = \frac{2}{y}, \quad Q(y) = 4y + 3$$

المعامل المكامل I هو :

$$I = e^{\int \frac{2}{y} dy} = e^{2 \ln y} = e^{\ln y^2} = y^2$$

ويكون الحل العام هو :

$$I x = \int I Q dy + C$$

$$\begin{aligned} y^2 x &= \int y^2 (4y + 3) dy + C \\ &= y^4 + y^3 + C \end{aligned}$$

أى أن الحل العام هو :

$$yx = y^2 + y + \frac{C}{y^2}$$

تمارين

اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

(i) $\frac{dx}{dy} + x \sec y = \cos^2 y$

Hint: The solution can be written as

$$\begin{aligned} x (\sec y + \tan y) &= \int \cos^2 y (\sec y + \tan y) dy + c \\ &= \int (\cos y + \sin y \cos y) dy + c \\ &= \sin y + \frac{1}{2} \sin^2 y + c \end{aligned}$$

(ii) $y' + \frac{1}{x+1} y = \frac{\cos x}{1+x}$

Hint: The solution can be written as

$$y = \frac{1}{1+x} (\sin x + c)$$

$$(iii) y' + \frac{2}{x}y = x^3$$

Hint: The solution can be written as

$$x^2 y = \frac{1}{5} x^5 + c$$

7-معادلة برنولي التفاضلية:

الصورة العامة لهذه المعادلة في الصورة

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

حيث Q, P دوال متصلة معلومة في x فقط وأن n عدد حقيقي لا يساوي صفر أو الواحد الصحيح، إذا كانت $n = 0$ فإن المعادلة (1) تكون معادلة خطية وعندما $n = 1$ فإنها تكون معادلة تفاضلية يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات لذا سنفرض أن $n \neq 0, n \neq 1$ ولتحويل معادلة برنولي إلى معادلة خطية نتبع الآتي

١- نقسم طرفي المعادلة (1) على y^n فتصبح

$$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}} P = Q$$

$$\therefore y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} P = Q$$

٢- نضع $z = y^{1-n}$ إذن

$$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} = Q$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} + (1-n)zp = (1-n)Q$$

وهذه المعادلة خطيه عاملها المكامل μ هو

$$\mu = e^{\int (1-n) p dx}$$

وحلها العام هو

$$\mu z = (1-n) \int \mu Q dx + c$$

ويكون الحل العام لمعادلة برنوللى هو

$$\mu y^{1-n} = \int (1-n) \mu Q dx + c$$

أمثلة

مثال 14

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$$

الحل

بالقسمة على y^3

$$\frac{1}{y^3} \frac{dy}{dx} + \frac{x}{y^2} = x^3$$

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx} \quad \text{نضع } z = y^{-2} \quad \text{إذن}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\frac{-1}{2} \frac{dz}{dx} + xz = x^3 \therefore \frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3$$

$$\therefore \mu = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$$

$$\therefore e^{-x^2} z = -2 \int x^3 e^{-x^2} dx + c = -2 \int x^2 (xe)^{-x^2} dx + c$$

$$\begin{aligned} \therefore e^{-x^2} z &= -2 \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \int x^3 e^{-x^2} dx \right] + c \\ &= x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c \end{aligned}$$

الحل العام هو

$$\frac{e^{-x^2}}{y^2} = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c$$

$$\therefore y^2 = \frac{1}{x^2 + 1 + ce^{x^2}}$$

مثال 15

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$$

الحل

بالقسمة على xy^2 تصبح المعادلة في الصورة

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy} = \frac{\ln x}{x}$$

نضع $z = y^{-1}$ ومنها

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

وهذه المعادلة خطية عاملها المكامل هو $\mu = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{1}{x} z = -\int \frac{1}{x^2} \ln x dx + c$$

باجراء التكامل بالتجزئ نحصل على

$$\frac{1}{x} z = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + c$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المطلوبة هو

$$\therefore \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + c$$

or

$$\frac{1}{y} = \ln x + cx + 1$$

تمارين

اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

(i) $y' + \frac{3}{x}y = x^4y^3$

Hint: The solution can be written as

$$\frac{1}{y^2} = 2x^5 + cx^6$$

(ii) $y' + xy = e^{\frac{x^2}{2}}y^2$

Hint: The solution can be written as

$$\frac{1}{y} = e^{\frac{x^2}{2}}(c - x).$$

نسأل الله التوفيق والسداد.

الباب الثالث المعادلات التفاضلية الخطية من رتب عليا

١- مقدمة :

المعادلة التفاضلية من الرتبة n يقال إنها خطية في المتغير y (المتغير التابع) إذا كان $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ من الدرجة الأولى وتكون على الصورة العامة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

حيث $a_0 \neq 0$

فإذا كانت جميع المعاملات $a_0, a_1, \dots, a_n$ قيم ثابتة، سميت المعادلة خطية ذات معاملات ثابتة ، أما إذا كانت واحدة على الأقل من المعاملات دالة في x سميت المعادلة ذات معاملات متغيرة .

وتكون المعادلة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

خطية متجانسة ، حيث $f(x)=0$ في المعادلة (1)

ملحوظة هامة :

إذا كانت $f(x) \neq 0$ فإن المعادلة (1) تكون خطية غير متجانسة

تعريف : المؤثر التفاضلي D :

نعرف $D \equiv \frac{d}{dx}$ أي المشتقة الأولى بالنسبة إلى x .

كذلك فإن :

$$D^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^3 \equiv \frac{d^3}{dx^3}; \dots \dots \dots D^k \equiv \frac{d^k}{dx^k}$$

$$D e^{3x} = \frac{d}{dx} e^{3x} = 3e^{3x}$$

مثال

$$D^2 e^{3x} = \frac{d^2}{dx^2} e^{3x} = 9e^{3x}$$

بعض خواص المؤثر D :

$$1) \quad D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$$

$$2) \quad D[kf(x)] = kDf(x)$$

$$3) \quad F(D) e^{\alpha x} = F(\alpha) e^{\alpha x} \quad ; \quad F \text{ كثيرة حدود في } D$$

مما سبق يمكن كتابة المعادلة (1) باستخدام المؤثر D على الصورة

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots \dots \dots a_{n-1} D + a_n) y = f(x)$$

حيث نجد أن

$$\Phi(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots \dots \dots + a_{n-1} D + a_n$$

دالة كثيرة حدود في D من الدرجة n

وبذلك تصبح المعادلة (1) على الصورة الرمزية :

$$\Phi(D) y = f(x)$$

وهي معادلة خطية غير متجانسة، أما المعادلة

$$\Phi(D)y = 0$$

فهي معادلة خطية متجانسة .

وسوف ندرس الآن بعض الخواص الأساسية لحلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية .

٢- خواص حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

نفترض أن المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (I)$$

نظرية :

إذا كان كل من y_1, y_2 حل خاص للمعادلة (I) فإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حل أيضاً للمعادلة (I) ،حيث c_1, c_2 ثابتان .

البرهان : يترك للطلاب

تعريف :

$$(1) \quad \text{الحلان } y_1, y_2 \text{ للمعادلة (I) مستقلان خطياً إذا كان } \frac{y_2}{y_1} \neq c \text{ (ثابت)}$$

$$\text{أي أن } y_2 \neq c y_1$$

$$(2) \quad \text{الحلان } y_1, y_2 \text{ للمعادلة (I) مرتبطان خطياً إذا كان } \frac{y_2}{y_1} = c \text{ (ثابت)}$$

$$\text{أي أن } y_2 = c y_1$$

تعريف (الرونسكيان) : Wronskian

إذا كان $y_1(x), y_2(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق في نطاق تعريفهما ، فإننا نعرف الرونسكيان لهما كما يأتي :

$$W\{y_1(x), y_2(x)\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

تعريف :

(١) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (I) مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كان $W\{y_1, y_2\} \equiv 0$.

(٢) الحلان y_1, y_2 للمعادلة (I) مستقلان خطياً إذا وفقط إذا كان $W\{y_1, y_2\} \neq 0$.

مثال :

ابحث إرتباط واستقلال كل مجموعة من الدوال الآتية :

1) e^x, e^{-x}

2) $1, x, x^2$

3) $e^x, 2e^x, x$

الحل :

1) $W\{e^x, e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

∴ الدالتان مستقلتان خطياً .

$$2) \quad W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

الدوال مستقلة خطياً

$$3) \quad W\{e^x, 2e^x, x\} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^x & x \\ e^x & 2e^x & 1 \\ e^x & 2e^x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

∴ الدوال مرتبطة خطياً .

تعريف : الحل العام :

إذا كان y_1, y_2 حلين مستقلين للمعادلة (1) فإن $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة (1) ، حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

ذات المعاملات الثابتة :

نفترض أن المعادلة

$$y'', a_1 y', a_2 y = 0 \quad (1)$$

حيث a_1, a_2 ثابتان.

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة ، نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطياً.

نحاول استخدام $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة (1) حيث λ مقدار ثابت .

$$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$$

نضع المعادلة على الصورة

ثم نعوض بالحل المفروض

$$Dy = De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, D^2 y = D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

نحصل على المعادلة

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0$$

وحيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$ ، ينتج أن

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة (المساعدة) (*Auxiliary characteristic*) ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر D ، وذلك بوضع λ بدلا من D .

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية في λ) وبالتالي لها جذران λ_1, λ_2

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad \text{حيث}$$

وهذان الجذران لهما ثلاث حالات :

$$(1) \quad \text{حقيقيان مختلفان} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 .$$

$$(2) \quad \text{حقيقيان متساويان} \quad \lambda_1 = \lambda_2 .$$

$$(3) \quad \text{مركبان} .$$

سوف ندرس كل حالة على حده .

(١) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أى ان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، نجد ان $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً لماذا ؟

وبالتالى فان الحل العام يكون على صورة $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 + 3D - 4)y = 0$$

نضع المعادلة على صورة

$$D = \frac{d}{dx} \text{ حيث}$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

فان المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda = -4 , \lambda = 1$$

اى ان

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$$

يكون الحل العام على صورة

مثال :

$$2y'' - 3y' = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلة

نضع المعادلة على صورة $(2D^2 - 3D)y = 0$

نفرض $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

$$2\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

فإن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda = 0, \quad \frac{3}{2}$$

و تكون جذورها

ويكون الحل العام صفر

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$$

أي أن

$$y = c_1 + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$$

٢) جذرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

أي أن $\lambda_1 = \lambda_2$ في هذه الحالة يكون $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبطاً بالحل $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ، لذا نبحث عن حل آخر y_2 غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ يمثل حلاً للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 .

على ذلك ، يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}$$

أو

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

حيث

مثال :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 - 4D + 4) y = 0$$

نضع المعادلة على صورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

∴ المعادلة المساعدة

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda = 2, 2$$

ويكون جذراها

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

أى أن الحل العام

٣ جذرا المعادلة المميزة مركبان :

إذا كان احد جذرى المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ حيث $i = \sqrt{-1}$ فإن الجذر الآخر $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ يكون على صورة (الجذر المرافق)، حيث $\beta \neq 0$.

من ذلك فإن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ، ويكون الحل العام

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \quad (1)$$

حيث A_1, A_2 ثابتان اختياريان .

ويمكن اثبات ان الحل العام يكون على صورة

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x]$$

ولإثبات ذلك :

نضع الحل (I) على صورة

$$y = A_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + A_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} [A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}]$$

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x, \quad e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x. \quad \text{ونعلم ان}$$

وعلى ذلك فان

$$y = e^{\alpha x} [A_1 (\cos \beta x + i \sin \beta x) + A_2 (\cos \beta x - i \sin \beta x)]$$

$$= e^{\alpha x} [(A_1 + A_2) \cos \beta x + i(A_1 - A_2) \sin \beta x]$$

$$A_1 + A_2 = C_1, \quad i(A_1 - A_2) = C_2 \quad \text{ونعتبر}$$

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x] \quad \text{فيكون الحل هو :}$$

مثال :

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

اوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 + 2D + 4)y = 0$$

نضع المعادلة على صورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

∴ فان المعادلة المساعدة هي

$$\therefore \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i$$

∴ الحل العام للمعادلة

$$y = e^{-x} [c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$$

مثال :

$$y'' + 9y = 0$$

لوجد الحل العام للمعادلة

الحل :

$$(D^2 + 9) = 0$$

نضع المعادلة على صورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

∴ فإن المعادلة المساعدة هي

$$\therefore \lambda = \pm 3i$$

ويكون جذراها

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

٣- حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n ذات المعاملات الثابتة

يمكن تعميم الحالات السابقة الخاصة بحل معادلات الرتبة الثانية على المعادلات من الرتبة n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاة

فتكون المعادلة المساعدة

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

التي نحصل منها على الجذور

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور .

(١) إذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ (أعداداً حقيقية)

فان الحل العام

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$$

(٢) إذا كانت جميع الجذور حقيقية واحد الجذور مكرر K من المرات

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k, \lambda_{k+1} \neq \dots \neq \lambda_n$ فان الحل العام يكون

$$y = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_k x^{k-1}] e^{\lambda x} + c_{k+1} e^{\lambda_{k+1} x} + \dots + c_n x^{\lambda_n}$$

(٣) إذا كانت الجذور $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha + i\beta$

$\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \alpha - i\beta$ فانه يوجد

ويكون الحل العام المناظر لتلك الجذور

$$y = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos \beta x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin \beta x]$$

أمثلة عامة

مثال :

أوجد حل المسألة القيمة الابتدائية

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 0 \quad ; y(0) = 4, y'(0) = 8, y''(0) = -4$$

الحل :

$$(D^3 + 2D^2 - 3D)y = 0$$

نضع المعادلة على الصورة

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة

المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, 1, -3 \quad \therefore \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

ويكون الحل

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-3x} \quad (1)$$

ولايجاد الحل الذى يحقق الشروط الابتدائية ، نوجد

$$y' = c_2 e^x - 3c_3 e^{-3x} \quad (2)$$

$$y'' = c_2 e^x + 9c_3 e^{-3x} \quad (3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية فى المعادلات (1), (2), (3)

$$\therefore 4 = c_1 + c_2 + c_3 + \dots \quad (4) \quad \Leftarrow \quad (1) \quad y(0) = 4$$

$$8 = c_2 - 3c_3 \dots \dots \dots (5) \quad \Leftarrow \quad (2) \quad y'(0) = 8$$

$$c_2 + 9c_3 \dots \dots \dots (6) \quad \Leftarrow \quad (3) \quad y''(0) = -4 = -4$$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 5, \quad c_3 = -1 \quad , \quad \text{بحل المعادلات (4), (5), (6)}$$

$$y = 5e^x - e^{-3x} \quad \text{و يكون الحل على الصورة}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' + 2y'' + y' - 2y = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 0$$

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda + 2) - (\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, -1, -2$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-2x}$$

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(D - 2)^3(D + 3)^2(D - 4)y = 0$$

الحل :نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$(\lambda - 2)^3(\lambda + 3)^2(\lambda - 4) = 0$$

$$\therefore \lambda = 2, 2, 2, -3, -3, 4$$

ويكون الحل العام

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{2x} + (c_4 + c_5 x) e^{-3x} + c_6 e^{4x}$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$$

الحل :نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\therefore \lambda^2 (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda = 0, 0, 1, 1$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x) e^x.$$

مثال :

اوجد الحل العام للمعادلة

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -6$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^3 - 6D^2 + 9D)y = 0$$

نفترض أن $y=e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0, 3, 3$$

ويكون الحل العام

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x) e^{3x} \quad (1)$$

ولإيجاد الحل الخاص ، نوجد

$$y' = 3(c_2 + c_3 x) e^{3x} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 9(c_2 + c_3 x) e^{3x} + 3c_3 e^{3x} + 3c_3 e^{3x} \\ &= 3[3(c_2 + c_3 x) e^{3x} + 2c_3 e^{3x}] \end{aligned} \quad (3)$$

بالتعويض في (1), (2), (3) من الشروط الابتدائية .

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2 \quad (4)$$

$$y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 3c_2 + c_3 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} y''(0) &= -6 \quad \Rightarrow \quad -6 = 3[3c_2 + 2c_3] \\ \Rightarrow \quad -2 &= 3c_2 + 2c_3 \end{aligned} \quad (6)$$

بحل (4), (5), (6) نجد أن

$$c_1 = -2, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = -4$$

ويكون الحل الخاص الذي يحقق الشروط

$$y = 2(1 - 2x)e^{3x} - 2$$

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

الحل :

نفترض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة .

∴ تكون المعادلة المساعدة

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 13 = 0$$

حيث ان المعادلة جبرية من الدرجة الثالثة ومن الصعب تحليل الطرف الايسر الى عوامل اقل من الدرجة الثالثة ، لذا نستخدم التخمين لحساب الجذور .

من نظرية المعادلات ، للمعادلة جذر حقيقى واحد على الاقل عبارة عن احد عوامل العدد 13 (الحد المطلق) .

$$\therefore L.H.S. = 1 - 3 + 9 + 13 \neq 0 \quad \lambda = 1 \quad \text{نفرض}$$

$$L.H.S. = -1 - 3 - 9 + 13 = 0 = R.H.S \quad \lambda = -1 \quad \text{نفرض}$$

∴ $\lambda = -1$ أحد الجذور $\Leftrightarrow \lambda + 1 = 0$ احد العوامل باستخدام القسمة على العامل $(\lambda + 1)$ نحصل على $(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0 \quad \therefore \text{تصبح المعادلة المميزة}$$

$$\lambda = -1, \quad \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

$$y = c_1 e^{-x} + e^{2x} [c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x] \quad \text{ويكون الحل العام}$$

٤- حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة :

نعلم أن المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة ذات المعاملات الثابتة تكون على الصورة

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \dots, \dots a_0 \neq 0 \quad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت ، $f(x)$ دالة متصلة في نطاق تعريفها.

وباستخدام المؤثر D ، فإن الصورة الرمزية للمعادلة (1)

$$\Phi(D) y = f(x) \quad (2)$$

حيث $\Phi(D)$ دالة كثيرة حدود من درجة n في D ،

$$\Phi(D) = a_0 D^n + \dots + a_{n-1} D + a_n$$

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (2) نتبع الخطوات الآتية :

(١) نوجد حل المعادلة المتجانسة المناظرة

$$\Phi(D) y = 0$$

وذلك كما سبق دراسته ، ونرمز للحل الناتج بالرمز y_h ، أى أن y_h يحقق المعادلة المتجانسة فقط.

(٢) نوجد حلاً خاصاً نرمز له بالرمز y_p ويحقق المعادلة (2) ، وسوف نعرض لطريقة إيجاد y_p

(٣) نوجد الحل العام y_G حيث $y_G = y_h = y_p$ وبالطبع فإن y_G يحقق المعادلة (2).

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة $\Phi(D) y = 0$

$$\therefore \Phi(D) y_h = 0$$

$$\Phi(D) y = f(x)$$

y_p يحقق المعادلة

$$\therefore \Phi(D) y = f(x)$$

$$\Phi(D) y = f(x)$$

ولإثبات أن y_G يحقق المعادلة

$$L.H.S = \Phi(D) y_G = \Phi(D) [y_h + y_p] = \Phi(D) y_h + \Phi(D) y_p = 0 + f(x) = f(x)$$

$$= R.H.S$$

طرق إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة

المؤثر العكسي:

حيث ان y_p حل يحقق المعادلة $\Phi(D)y = f(x)$

$$\therefore \Phi(D)y_p = f(x)$$

باستخدام التأثير العكسي على الطرفين

$$\frac{1}{\phi(D)} \phi(D)y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

$$\therefore y_p = \frac{1}{\phi(D)} f(x)$$

وسوف ندرس استخدام التأثير العكسي $\frac{1}{\phi(D)}$ على الدالة $f(x)$ في صور مختلفة .

(١) اذا كان $f(x) = e^{\alpha x}$.

نعلم ان

$$\phi(D)e^{\alpha x} = \phi(\alpha)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \frac{1}{\phi(D)} \phi(\alpha)e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(D)} \phi(D)e^{\alpha x}$$

$$\therefore \phi(\alpha) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$$

بالقسمة على $\phi(\alpha) \neq 0$

$$\phi(\alpha) \neq 0 \quad , \quad \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\phi(\alpha)} e^{\alpha x} \quad , \quad \phi(\alpha) \neq 0 \quad \text{أى أن}$$

(٢) إذا كان $f(x)=e^{\alpha x} v(x)$

نظم لن

$$\begin{aligned} D[e^{\alpha x} v(x)] &= e^{\alpha x} D v(x) + \alpha e^{\alpha x} v(x) \\ &= e^{\alpha x} (D + \alpha) v(x) \end{aligned}$$

ليضاً

$$\begin{aligned} D^2[e^{\alpha x} v(x)] &= D[e^{\alpha x} (D + \alpha) v(x)] \\ e^{\alpha x} [D^2 v(x) + \alpha D v(x)] + \alpha e^{\alpha x} (D + \alpha) v(x) &= \\ &= e^{\alpha x} [D + \alpha]^2 v(x) \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن

$$D[e^{\alpha x} v(x)] = e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) v(x) \quad \phi(D)$$

ومن ذلك ، يمكن اثبات أن

$$\frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\phi(D)$

$$L.H.S. = \phi(D) \frac{1}{\phi(D)} e^{\alpha x} v(x) = e^{\alpha x} v(x)$$

$$R.H.S. = \phi(D) [e^{\alpha x} \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)]$$

$$= e^{\alpha x} \phi(D + \alpha) \frac{1}{\phi(D + \alpha)} v(x)$$

$$= e^{\alpha x} v(x)$$

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x) dx \quad (3)$$

let $\frac{1}{D} f(x) = z \Rightarrow f(x) = Dz = \frac{dz}{dx}$. الإثبات

$$\therefore z = \int f(x) dx = \frac{1}{D} f(x).$$

$\frac{1}{D}$ للتأثير العكسي للمؤثر D ، أى $\frac{1}{D}$ يمثل التكامل بالنسبة إلى x ، بينما $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة إلى x عدد k من المرات .

(4) إذا كان $f(x)$ دالة كثيرة حدود من درجة n ، وكان $\phi(D)$ تأخذ إحدى صور

$$(1+D), (1-D), (1+D)^2, (1-D)^2, \dots$$

$$\therefore \frac{1}{1+D} f(x) = [1 - D + D^2 + \dots + (-1)^n D^n] f(x)$$

$$\frac{1}{1-D} f(x) = [1 + D + D^2 + \dots + D^n] f(x)$$

$$\frac{1}{(1-D)^2} f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \dots + (n+1)D^n] f(x)$$

لو نتبع لقسمة المطولة لإيجاد $\frac{1}{\phi(D)}$

٥- إذا كان $f(x) = c$ ، c مقدار ثابت .

$$\frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{\Phi(D)} c e^{ax} = c \frac{1}{\Phi(0)} e^{ax} = \frac{c}{\Phi(0)}; \quad \Phi(0) \neq 0$$

1) $\Phi(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$ فإذا كان

$$\therefore \Phi(0) = 5$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{c}{\Phi(0)} = \frac{c}{5}$$

$$2) \Phi(D) = D^3 - 2D^2 + 6D \rightarrow \Phi(0) = 0.$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} c = \frac{1}{D^3 - 2D^2 + 6D} c = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{D^2 - 2D + 6} c = \frac{1}{D} \frac{c}{6} = \frac{c}{6} x$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

-٦

فإن

$$\frac{1}{\Phi(D^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

$$D \sin(\alpha x + \beta) = \alpha \cos(\alpha x + \beta)$$

نعلم أن

$$D^2 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^2 \sin(\alpha x + \beta)$$

$$D^3 \sin(\alpha x + \beta) = -\alpha^3 \cos(\alpha x + \beta)$$

$$D^4 \sin(\alpha x + \beta) = \alpha^4 \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^2 \sin(\alpha x + \beta)$$

ومن ذلك يمكن استنتاج

$$(D^2)^k \sin(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \sin(\alpha x + \beta)$$

وبالمثل نشبت أن

$$(D^2)^k \cos(\alpha x + \beta) = (-\alpha^2)^k \cos(\alpha x + \beta)$$

$$\therefore \Phi(D^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases} = \Phi(-\alpha^2) \begin{cases} \sin(\alpha x + \beta) \\ \cos(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

وعلى ذلك فإن

بأخذ $f(x) = \sin(\alpha x + \beta)$

$$\therefore \Phi(D^2) \sin(\alpha x + \beta) = \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta)$$

$$\frac{1}{\Phi(D^2)}$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر العكسي

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)} \Phi(-\alpha^2) \sin(\alpha x + \beta) = \sin(\alpha x + \beta)$$

وحيث $\Phi(-\alpha^2)$ مقدار ثابت

$$\therefore \Phi(-\alpha^2) \frac{1}{\Phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \sin(\alpha x + \beta)$$

بالقسمة على $\Phi(-\alpha^2) \neq 0$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\Phi(-\alpha^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \sin(\alpha x + \beta)$$

٧- من الحالة (١) إذا كان $\Phi(x) = 0$

$$e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \cdot 1 = e^{\alpha x} \quad \text{نضع } v(x)$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\Phi(D)} (e^{\alpha x} \cdot 1) = e^{\alpha x} \frac{1}{\Phi(D)} \{1\} \quad \text{من (2)}$$

٨- من الحالة (٦) إذا كان $\Phi(-\alpha^2) = 0$

$$\sin(\alpha x + \beta) = I e^{i(\alpha x + \beta)} \quad \text{نضع في هذه الحالة}$$

$$\therefore \frac{1}{\Phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = I \frac{1}{\Phi(D)^2} e^{i(\alpha x + \beta)} I = I e^{i(\alpha x + \beta)} \frac{1}{\Phi(D + i\alpha)^2}$$

٤- أمثلة متنوعة :

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^2 + 2D - 3) y = 42 e^{4x}$$

الحل :

$$(D^2 + 2D - 3) y = 0$$

أولاً : نوجد حل

نفترض أن $y = e^{4x}$ حلاً للمعادلة

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

∴ المعادلة المميزة

$$\therefore (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -3$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

ثانياً : نوجد حلاً خاصاً y_p ،

$$y_p = \frac{1}{D^2 + 2D - 3} 42e^{4x} = 42 \frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42 \frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2e^{4x}$$

$$y_g = y_h + y_p$$

ثالثاً : الحل العام

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان.

الحل :

$$(D^3 - D^2) y = 0$$

أولا : نوجد حل

نجد أن

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 e^{+x}$$

ثانيا : نوجد y_p ، حيث

$$y_p = \frac{1}{D^3 - D^2} 2 \cos x = 2 \frac{1}{-D + 1} \cos x$$

بالضرب في المرافق $1 + D$

$$\therefore y_p = 2 \frac{1+D}{1-D^2} \cos x = 2 \frac{1+D}{1+1} \cos x = (1+D) \cos x = \cos x - \sin x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{+x} + \cos x - \sin x$$

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D^2 - D + 5)y = 0$$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

بالتحليل نجد أن

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right)$$

حيث A, B ثابتان اختياريان .

الحل الخاص y_p يعطي من

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 - D + 5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{1 - D} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1 + D}{(1 - D^2)} \{\sin 2x\} = \frac{1 + D}{5} \{\sin 2x\} \\ &= \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) \end{aligned}$$

أى أن

$$y_p = \frac{1}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right) + \frac{1}{5} (\sin 2x + \cos 2x)$$

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة

$$(D^3 - D^2)y = 2 \cos x$$

يحل أثناء المحاضرة

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D - I)^2(D + I)y = -2e^x$$

الحل :

المعادلة المتجانسة هي

$$(D - I)^2(D + I)y = 0$$

نفترض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$(\lambda - I)^2(\lambda + I) = 0$$

بالتحليل نجد أن $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$y_p = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)} \{-2e^x\}$$

$$= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)} \{e^x\}$$

$$= \frac{-2e^x}{2(D+1-1)^2} \{1\}$$

$$= -e^x \frac{1}{D^2} \{1\} = -\frac{1}{2} x^2 e^x$$

$$y_p = -\frac{1}{2} x^2 e^x$$

ومنها

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x) e^x - \frac{1}{2} x^2 e^x.$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

تمارين

اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الاتية:

(i) $y'' - 14y' - 48y = 0$

(ii) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

(iii) $y'' - 5y' + 6y = 7e^{4x}$

(iv) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$

(v) $y'' + 4y' + 5y = 10$

(vi) $y'' - 5y' + 6y = 9 \sin 2x$

الباب الرابع

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

سوف ندرس في هذا الباب بعض المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة التي
لهما أهمية خاصة .

المعادلات التفاضلية ذات المعاملات المتغيرة

"The differential equation variant coefficient"

تسمى المعادلة التفاضلية التي على الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) , \quad a_n \neq 0$$

حيث أن كل من $f(x), a_0, a_1, \dots, a_n$ دوال في المتغير المستقل x بمعادلة تفاضلية من
الرتبة النونية غير متجانسة ذات معاملات متغيرة . بحيث أن $f(x) \neq 0$ أما إذا كان
 $f(x) = 0$ فإن المعادلة التفاضلية تأخذ الصورة

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة النونية متجانسة ذات معاملات متغيرة حيث أن كل
من $a_0, a_1, \dots, a_n$ دوال في المتغير المستقل x .

"Euler's differential equation"

١ - معادلة أويلر التفاضلية :

معادلة أويلر التفاضلية من الرتبة الثانية تأخذ الصورة

$$a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

حيث a_2, a_1, a_0 ثوابت .

لحل المعادلة (1) فإننا نستخدم التعويض

$$x = e^t \quad \text{or} \quad t = \ln x$$

وهذا التعويض يحول المعادلة (1) ذات المعاملات المتغيرة إلى معادلة تفاضلية مناهرة ذات معاملات ثابتة كالآتي :

$$\theta = \frac{d}{dt}, \quad D = \frac{d}{dx} \quad \text{نفترض أن}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \text{بذلك نجد أن}$$

$$x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \quad \text{أي أن}$$

$$xD = \theta \quad (3) \quad \text{ومنها فإن}$$

وأيضاً

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \frac{dt}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dt} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dt} \right) \\ &= \frac{-1}{x^2} \frac{d}{dt} + \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

$$D^2 = \frac{-1}{x^2} \theta + \frac{1}{x^2} \theta^2 \quad \text{بذلك يكون}$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1) \quad (4) \quad \text{أى أن}$$

من العلاقات (4) , (3) يمكن بسهولة إثبات أن

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

... ..

$$x^n D^n = \theta(\theta - 1)(\theta - 2) \dots (\theta - n + 1)$$

والآن بالتعويض من المعادلتين (4) و (3) فى المعادلة (1) نجد أن

$$a_2 \theta(\theta - 1)y + a_1 \theta y + a_0 y = f(e')$$

$$(a_2 \theta^2 + (a_1 - a_2)\theta + a_0)y = f(e') \quad \text{ومنها}$$

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته . وبالتالي يمكن إيجاد الحل العام لمعادلة أويلر التفاضلية (1) كما سنوضح ذلك فى الأمثلة الآتية.

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2 D^2 - 2xD + 2)y = 4x^3$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e'$ ونفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1) - 2\theta + 2)y = 4e^{3x}$$

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 4e^{3x}$$

ومنها

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة .

لحل المعادلة المتجانسة

$$(\theta^2 - 3\theta + 2)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 3\theta + 2} \{4e^{3x}\} \\ &= \frac{1}{3^2 - 3 \times 3 + 2} \cdot 4e^{3x} = 2e^{3x} \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2e^{3x}$$

ولكن $x = e^t$ يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + 2x^3$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

لوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^3 D^3 + 2xD - 2)y = 0$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$(\theta(\theta - 1)(\theta - 2) + 2\theta - 2)y = 0$$

$$(\theta^3 - 3\theta^2 + 4\theta - 2)y = 0$$

ومنها

وهذه معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة متجانسة ذات معاملات ثابتة .

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$$

بالتحليل

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

فتكون الجذور هي

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^t + e^t (c_2 \cos t + c_3 \sin t)$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x + x(c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x))$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - 6y = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن :

$$(\theta(\theta - 1) - 6)y = e^{2t} + e^{-2t}$$

محاضرات الأسبوع "الحادي عشر و الثاني العاشر" مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية
Math 321

$$(\theta^2 - \theta - 6)y = e^{2t} + e^{-2t} \quad \text{ومنها}$$

$$(\theta^2 - \theta - 6)y = 0 \quad \text{المعادلة المتجانسة هي}$$

نفترض أن الحل على الصورة $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2 \quad \text{بالتحليل نجد أن الجذور هي}$$

$$y_h = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} \quad \text{بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - \theta - 6} \{e^{2t} + e^{-2t}\} \\ &= \frac{1}{\theta^2 - \theta - 6} \{e^{2t}\} + \frac{1}{\theta^2 - \theta - 6} \{e^{-2t}\} \\ &= \frac{e^{2t}}{4 - 2 - 6} + \frac{e^{-2t}}{(\theta - 2)^2 - (\theta - 2) - 6} \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} + e^{-2t} \frac{1}{\theta^2 - 5\theta} \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \frac{1}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{5}\right)^{-1} \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{5} + \dots\right) \{1\} \\ &= \frac{-1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \left(t + \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{5} e^{-2t} \left(t + \frac{1}{5}\right)$$

ولكن $x = e^t$ ومنها $t = \ln x$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^{-2} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{5} x^{-2} (\ln x + \frac{1}{5})$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' - xy' - 3y = x^5$$

الحل :

بإستخدام التعويض $x = e^t$ ونفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$xD = \theta$$

$$x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$$

$$(\theta(\theta - 1) - \theta - 3)y = e^{5t}$$

$$(\theta^2 - 2\theta - 3)y = e^{5t}$$

ومنها

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 2\theta - 3)y = 0$$

نفترض أن الحل لها هو $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي

$$y_H = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 2\theta - 3} \{e^{5t}\} \\ &= \frac{1}{25 - 10 - 3} \cdot e^{5t} = \frac{1}{12} e^{5t} \end{aligned}$$

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{1}{12} e^{5t}$$

بذلك يكون الحل هو

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^{-1} + \frac{1}{12} x^5$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2 y'' + 6xy' + 6y = \ln x$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ وبفرض أن $\theta = \frac{d}{dt}$ فإن

$$(\theta(\theta - 1) + 6\theta + 6)y = t$$

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = t$$

ومنها

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 + 5\theta + 6)y = 0$$

نفترض أن الحل على الصورة $y = e^{\lambda t}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$$

بالتحليل نجد أن الجذور هي

$$y_h = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

ويكون الحل الخاص y_p هو

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{\theta^2 + 5\theta + 6} \{t\} \\&= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{5\theta + \theta^2}{6}\right)^{-1} \{t\} \\&= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{5\theta}{6} + \dots\right) \{t\} \\&= \frac{1}{6} \left(t - \frac{5}{6}\right)\end{aligned}$$

بذلك يكون الحل هو

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36}$$

ولكن $x = e^t$ بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{1}{6} \ln x - \frac{5}{36}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

تمارين

اوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

(i)
$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = x^2$$

(ii)
$$x^2 y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^2}$$

٢- معادلة لاجرانج التفاضلية : "Lagrangels differential equation"

هذه المعادلة تأخذ صورة عامة لمعادلة اويلر التفاضلية السابقة وهي على الصورة

$$F[(ax+b)D]y = f(x)$$

حيث a, b ثوابت ، D هو المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$. وعلى الصورة الخطية تأخذ الصورة

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b) y' + a_n y = f(x)$$

حيث $a, b, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ثوابت ، $a_0 \neq 0$.

واضح انه عندما نأخذ $a=1, b=0$ فان معادلة لاجرانج تتحول إلى معادلة اويلر التفاضلية . أى أن معادلة اويلر التفاضلية صورة خاصة من معادلة لاجرانج التفاضلية. ولحل معادلة لاجرانج التفاضلية فإننا نستخدم التعويض $z=e^x, z=ax+b$ فتتحول المعادلة إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة تحل كما سبق دراسته وسنوضح ذلك بالأمثلة الآتية .
مثال :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+2)^2 y'' + (x+2)y' - y = x$$

الحل

باستخدام التعويض $z = x+2$ فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - y = z - 2$$

وهذه معادلة اويلر التفاضلية .

باستخدام التعويض $z = e^t$ وبوضع $\theta = \frac{d}{dt}$ فان

$$(\theta(\theta - 1) + \theta - 1)y = e^t - 2$$

$$(\theta^2 - 1)y = e^t - 2 \quad \text{ومنها}$$

وهذه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة .

المعادلة المتجانسة هي

$$(\theta^2 - 1)y = 0$$

نفترض أن الحل على صورة $y = e^{\lambda x}$. بالتفاضل والتعويض نحصل على المعادلة المساعدة

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

وبالتحليل نجد H من الجذرين هما

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو

$$y_H = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت اختيارية .

الحل الخاص يعطى من

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{\theta^2 - 1} \{e^t - 2\} \\ &= \frac{e^t}{(\theta + 1)^2 - 1} \{1\} + (1 - \theta^2)^{-1} \{2\} \\ &= \frac{e^t}{\theta^2 + 2\theta} \{1\} + (1 + \theta^2 + \dots) \{2\} \\ &= \frac{e^t}{2} \frac{1}{\theta} (1 + \frac{\theta}{2})^{-1} \{1\} + 2 \\ &= \frac{e^t}{2} \left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} + \dots \right) \{1\} + 2 \end{aligned}$$

ومنها

$$y_p = \frac{e^t}{2} \left(t - \frac{1}{2} \right) + 2$$

وبذلك يكون الحل

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{e^t}{2} \left(t + \frac{1}{2} \right) + 2$$

ولكن $z = e^t$ ومنها $t = \ln x$ وأيضاً $z = x + 2$ فيكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياريان .

٣- بعض الحالات الخاصة :

سنعرض في هذا الجزء لبعض الحالات الخاصة لمعادلات تفاضلية ذات معاملات متغيرة مستخدماً ما درسناه في الفصل الثامن . وتتلخص هذه الطريقة بوضع $\frac{dy}{dx} = p$

$$\text{ويكون } \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} \text{ أو } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

وتتضح الطريقة من الأمثلة التالية

مثال :

أ. معادلات تفاضلية على الصورة

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

وتحل هذه المعادلة بالتكامل المباشر مرتين

مثال

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 5$$

الحل

بالتكامل بالنسبة الى x مرتين نحصل على

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + c_1 \\ y &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{5}{2}x + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \cos x + 2x + 3$$

الحل

بالتكامل مرتين بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + x^2 + 3x + c_1$$

$$y = -\cos x + \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2$$

ب. معادلات تفاضلية على الصورة

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = g(y)$$

$$\text{نضع } \frac{dy}{dx} = p \text{ ويكون } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} (p) = \frac{d}{dy} p \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

ونعوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنحصل على

$$p \frac{dp}{dy} = g(y)$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$p dp = g(y) dy$$

وبالتكامل نجد أن

$$\frac{1}{2} p^2 = \int g(y) dy$$

وبأخذ الجذر التربيعي والتكامل نحصل على حل المعادلة التفاضلية المعطاة.

مثال

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y + a$$

حل المعادلة التفاضلية

حيث a عدد ثابت

الحل

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ فيكون } \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على

$$p \frac{dp}{dy} = y + a$$

ومنها نجد أن

$$p dp = (y + a) dy$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{y^2}{2} + ay + c_1$$

$$p^2 = y^2 + 2ay + 2c_1$$

وعلى ذلك فإن

$$\frac{dy}{dx} = p = \sqrt{y^2 + 2ay + 2c_1}$$

$$2c_1 = c$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2ay + c}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(y+a)^2 + (c-a^2)}}$$

ومن ذلك نجد أن

$$x = \sinh^{-1} \left(\frac{y+a}{c_2} \right) + c_3, \quad b = (c - a^2)$$

ومنها نحصل على

$$\frac{y+a}{c_2} = \sinh(x - c_3)$$

أى أن

$$y = b \sinh(x - c_3) - a$$

ج. معادلات تفاضلية خالية من x

وتكون على الصورة

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0$$

وفى هذه الحالة نستخدم التعويض

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$$

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2y \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

الحل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy} \quad \text{نضع} \quad \frac{dy}{dx} = p \quad \text{فيكون}$$

محاضرات الأسبوع "الحادي عشر و الثاني العاشر" مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية
Math 321

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نحصل على

$$p \frac{dp}{dy} - 2yp = 0$$

أى أن

$$p \left(\frac{dp}{dy} - 2y \right) = 0$$

ومنها نحصل على

إما $p = 0$ وهو مرفوض افتراضاً

أو

$$\frac{dp}{dy} - 2y = 0$$

أى أن

$$dp = 2y dy$$

ومنها نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = p = y^2 + c$$

وبالتكامل نجد أن

$$\int dx = \int \frac{dy}{y^2 + c}$$

$$x = \frac{1}{c} \tan^{-1} \left(\frac{y}{c} \right) + c_1$$

ويكون حل المعادلة المعطاة هو

$$y = c \tan (cx - c_2)$$

$$c_2 = c_1 c$$

مثال

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \left(1 + \frac{dy}{dx} \right) = 0, \quad \frac{dy}{dx} \neq 0$$

الحل

باستخدام التعويض السابق نحصل على

$$yp \frac{dy}{dp} - p(1 + p) = 0, \quad p \neq 0$$

وبفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{dp}{1+p} = \frac{dy}{y}$$

ومن ذلك نجد أن

$$\ln(1+p) = \ln y + \ln c_1$$

أي أن

$$1+p = c_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = p = c_1 y - 1$$

وبالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{c} \int c \frac{dy}{cy-1} = \int dx + c,$$

$$\frac{1}{c} \ln(y-1) = x + \ln c_1$$

ومنها نحصل على

$$y = \frac{1}{c} + \frac{c_2}{c} e^{cx}$$

$$c_2 = c c_1 \text{ حيث}$$

وهو حل المعادلة التفاضلية المعطاة

د. معادلات خالية من y :

وتكون على الصورة

$$f = (x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}) = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \text{ فيكون } \frac{dy}{dx} = p \text{ وفي هذه الحالة نضع}$$

مثال

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 3, \quad x \neq 0$$

حل المعادلة التفاضلية

الحل

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = p$$

باستخدام التعويض

$$x \frac{dp}{dx} - p = 3$$

فتؤول المعادلة إلى

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x} p = \frac{3}{x}$$

أى أن (2)

وهي معادلة خطية في أ ويكون المعامل المكامل هي

$$I = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = 1/x$$

ويكون حل المعادلة (2) هو

$$Ip = \frac{p}{x} = \int \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{p}{x} = \frac{-3}{x} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = p = cx - 3$$

ومنها

وبالتكامل يكون حل المعادلة التفاضلية (1) هو

$$y = c \frac{x^2}{2} - 3x - c_1$$

حيث c_1, c_2 ثابتان اختياران

مثال :

حل المعادلة التفاضلية

$$xy'' + y' = 6 \ln x$$

$x \neq 0$ و (1)

الحل :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$, \frac{dy}{dx} = p$$

نضع

فتؤول المعادلة التفاضلية إلى

$$x \frac{dp}{dx} + p = 6 \ln x$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = \frac{6 \ln x}{x}$$

(2)

وهي معادلة خطية في p ويكون المعامل المكامل هو

$$I = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

ويكون حل المعادلة (2) هو

$$\begin{aligned} xp &= \int 6 \ln x \, dx + \\ &= 6[x \ln x - x] + c \end{aligned}$$

أي أن

$$\frac{dy}{dx} = p = 6 [\ln x - 1] + \frac{c}{x}$$

وبالتكامل نحصل على

$$y = 6 [x \ln x - x] - 6x + c \ln x + c_1$$

حيث c, c_1 ثابتان اختياريان .

الباب الخامس

تحويل لابلاس واستخدامه في حل المعادلات التفاضلية

يستخدم بتحويل لابلاس في حل بعض المعادلات التفاضلية العادية وكذلك بعض المعادلات التفاضلية الجزئية والتكاملية .

١- تعريف : (تحويل لابلاس)

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx, \quad p > 0 \quad (1) \quad \text{يسمى التكامل}$$

بتحويل لابلاس ويرمز له بالرمز $L\{f\}$ و في هذه الحالة يمكن كتابة (1) على الصورة :

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx, \quad p > 0 \quad (2)$$

٢- خواص المؤثر $L\{f\}$:

نفترض ان α و β ثابتين وأن كل من $f(x)$ و $g(x)$ دالة في المتغير x و أن $L\{f\}$ هو مؤثر لابلاس ، فإن :

$$1 - L\{\alpha f(x)\} = \alpha L\{f(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة (1) نجد أن :

$$L\{\alpha f(x)\} = \int_0^{\infty} \alpha f(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha L\{f(x)\}$$

$$2- L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

ذلك لأن من المعادلة (1) وحيث أن كل من α و β ثابتين فإن :

$$L\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \int_0^{\infty} \alpha f(x) + \beta g(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \alpha f(x) \cdot e^{-px} dx + \int_0^{\infty} \beta g(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha \int_0^{\infty} f(x) \cdot e^{-px} dx + \beta \int_0^{\infty} g(x) \cdot e^{-px} dx$$

$$= \alpha L\{f(x)\} + \beta L\{g(x)\}$$

مما سبق نستنتج أن المؤثر $L\{ \}$ مؤثر تكاملي خطي .

تعريف : (تحويل لابلاس العكسي)

$$f(x) = L^{-1}\{\bar{f}(p)\} \quad \text{فإن} \quad L\{f(x)\} = \bar{f}(p) \quad \text{إذا كان}$$

ويسمى $L^{-1}\{ \}$ بمؤثر لابلاس العكسي للمؤثر $L\{ \}$. وهذا المؤثر له الخواص الآتية :

$$1- L\{L^{-1}\{\bar{f}(p)\}\} = \bar{f}(p),$$

$$2- L^{-1}\{L\{f(p)\}\} = f(p),$$

$$3- L^{-1}\{\alpha \bar{f}(p)\} = \alpha L^{-1}\{\bar{f}(p)\} \quad : \quad \text{ويمكن إيجاد تحويل لابلاس لكل دالة تحقق الشرط :}$$

$$|f(x)| < M e^{ax}$$

حيث a و M عدنان حقيقيان موجبان .

تسمى الدوال التي تحقق الشرط السابق دوال لها درجة أسية a وهى الدوال التي على الصورة $x^k, \sin kx, \cos kx, \dots$

والآن سنوجد تحويلات لابلاس لبعض الدوال .

$$(1) \text{ إذا كان } f(x) = 1$$

فإن

$$L\{1\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} dx = \left[\frac{e^{-px}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

أى أن

$$L\{1\} = \frac{1}{p} \quad (3)$$

$$(2) \text{ إذا كان } f(x) = x^n ; n \geq 1 :$$

$$L\{x^n\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx \quad \text{فإن}$$

وبوضع $px = u$ فإن

$$L\{x^n\} = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} ; n=1,2,3,\dots \quad (4)$$

(٣) إذا كان $f(x) = e^{ax}$ حيث a ثابت حقيقي :

فإن

$$\begin{aligned} L\{e^{ax}\} &= \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{ax} e^{-px} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(p-a)x} dx \end{aligned}$$

$$L\{e^{ax}\} = \left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}$$

وبالتالى فإن

$$L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} ; p > a \quad (5)$$

(٤) إذا كان $f(x) = \sin ax$ حيث a ثابت حقيقي :

$$L\{\sin ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \sin ax e^{-px} dx$$

فإن

$$= \frac{a}{p^2 + a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{\sin ax\} = \frac{a}{p^2 + a^2} \quad (6)$$

(٥) إذا كان $f(x) = \cos ax$ حيث a ثابت حقيقي :

$$L\{\cos ax\} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \cos ax \cdot e^{-px} dx$$

فإن

$$= \frac{p}{p^2 + a^2}$$

وعلى ذلك فإن

$$L \{ \cos ax \} = \frac{p}{p^2 + a^2} \quad (7)$$

(٦) إذا كان $f(x) = \sinh ax$ حيث a ثابت حقيقي :

$$L \{ \sinh ax \} = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \sinh ax \cdot e^{-px} dx$$

فإن

$$= \frac{a}{p^2 - a^2}$$

أى أن :

$$L \{ \sinh ax \} = \frac{a}{p^2 - a^2} \quad (8)$$

ذلك لأن :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sinh ax \cdot e^{-px} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{ax} - e^{-ax}) \cdot e^{-px} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{-(p-a)x} - e^{-(p+a)x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-(p-a)x}}{-(p-a)} - \frac{e^{-(p+a)x}}{-(p+a)} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right] = \frac{1}{2} \frac{p+a-p+a}{p^2 - a^2} \\ &= \frac{a}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

وبطريقة أخرى :

$$\begin{aligned} L \{ \sinh ax \} &= L \left\{ \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} [L \{ e^{ax} \} - L \{ e^{-ax} \}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right] \\ &= \frac{a}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

(٧) إذا كان $f(x) = \cosh ax$ حيث a ثابت حقيقي :

فإن :

$$L \{ \cosh ax \} = \frac{p}{p^2 - a^2} \quad (9)$$

وذلك لان

$$\begin{aligned} L \{ \cosh ax \} &= L \left\{ \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} [L \{ e^{ax} \} + L \{ e^{-ax} \}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{p+a-p+a}{p^2 - a^2} \\ &= \frac{p}{p^2 - a^2} \end{aligned}$$

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي :

S. No.	$f(x)$	$L f(p)$
1	1	$1/p, p > 0$
2	x^n (n is a + v θ integer)	$n! / p^{n+1}, p > 0$
3	$x^n, n > -1$	$\Gamma(n+1) / p^{n+1}, p > 0$
4	x^{ax}	$1/(p-a), p > 0$
5	$\sin^{-ax}$	$a/(p^2+a^2), p > 0$
6	$\cos ax$	$p/(p^2+a^2), p > 0$
7	$\sinh ax$	$a/(p^2 - a^2), p > a $
8	$\cosh ax$	$p/(p^2 - a^2), p > a $

نظرية (١) :

$$L\{e^{-ax} f(x)\} = \bar{f}(p+a)$$

إذا كانت $L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$ فإن

مثال :

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}; n=1,2,3,\dots$$

أثبت أن

الحل :

من تعريف تحويل لابلاس نجد أن

$$\begin{aligned} L\{x^n e^{-ax}\} &= \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cdot e^{-px} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^n e^{-(a+p)x} \cdot dx = \bar{f}(p+a) \end{aligned}$$

ولدينا :

$$L\{x^n\} = \bar{f}(x) = \frac{n!}{p^{n+1}}; n=1,2,3, \dots$$

وعلى ذلك فإن

$$L\{x^n e^{-ax}\} = \bar{f}(p+a) = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}};$$

$n=1,2,3,\dots$

نظرية (٢) :

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

إذا كانت

$$L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \bar{f}(p); n=1, 2, 3, \dots$$

فإن

مثال:

إثبت أن

الحل:

$$L\{x \cos ax\} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$$

$$L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2 + a^2}$$

لدينا

بتطبيق نظرية (٢) فإن :

$$\begin{aligned} L\{x \cos ax\} &= -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + a^2} \right) \\ &= \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

نظرية (٣) : (تغير المقياس) *Change of scale*

$$L\{f(x)\} = \bar{f}(p)$$

إذا كان

$$L\{f(ax)\} = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right)$$

فإن

مثال:

$$L\{\sin 3x\}$$

أوجد

الحل:

$$L\{\sin x\} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

لدينا

$$L\{\sin 3x\} = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{p}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{p^2 + 9}$$

فإن

٣- تحويلات لابلاس العكسية *Inverse Laplace transforms*

من تحويل لابلاس للدالة $f(x)$ وجدنا أن

$$L\{f(x)\} = \tilde{f}(p)$$

وبافتراض أن L^{-1} هو المؤثر العكسي للمؤثر L فإن :

$$f(x) = L^{-1}\{\tilde{f}(p)\}$$

وعلى هذا فإنه مما سبق يمكن بسهولة استنتاج ما يلي:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1 \quad \text{فإن} \quad L\left\{1\right\} = \frac{1}{p} \quad \text{١- إذا كان}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{n!}{p^{n+1}}\right\} = x^n; n = 1, 2, 3 \quad \text{فإن} \quad L\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}; n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{٢- إذا كان}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{ax} \quad \text{فإن} \quad L\{e^{ax}\} = \frac{1}{p-a} \quad \text{٣- إذا كان}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+a^2}\right\} = \cos ax \quad \text{فإن} \quad L\{\cos ax\} = \frac{p}{p^2+a^2} \quad \text{٤- إذا كان}$$

وهكذا بالنسبة لباقي الدوال

مثال:

أوجد $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)(p+b)}\right\}$ حيث a, b ثابتان .

الحل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}$$

بالضرب في $(p+a)(p+b)$ وبمساواة المعاملات نجد أن

$$A = -B = \frac{1}{a-b}$$

ومنها نحصل على

$$\frac{1}{(p+a)(p+b)} = \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right]$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسي

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+a)(p+b)} \right\} &= \frac{1}{a-b} \left[L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+a} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+b} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{a-b} (e^{-ax} - e^{-bx}) \end{aligned}$$

وبالتالي فإن

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p+a)(p+b)} \right\} = \frac{1}{a-b} (e^{-ax} - e^{-bx})$$

مثال:

أوجد $L^{-1} \left\{ \frac{a}{p(p+a)} \right\}$ حيث a ثابت.

الحل:

بالتحليل إلى كسور جزئية نحصل على

$$\frac{a}{p(p+a)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+a}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسي

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{p(p+a)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\} \\ = 1 - e^{-ax}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{p(p+a)}\right\} = 1 - e^{-ax}$$

وبالتالي

٤ - تحويلات لابلاس للمشتقات Laplace Transforms of Derivatives

نفترض أن الدالة $y(x)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x ، فإن مؤثر لابلاس للمشتقة يكتب على الصورة $\frac{dy}{dx}$.

ويعرف كالاتي : $L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{dy}{dx} dx$ أى

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} dy$$

- ١٧٢ -

$$= [ye^{-px}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} ye^{-px} dx$$

$$= -y(0) + pL\{y(x)\}$$

وبالتالي

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = p\bar{y}(p) - y(0) \quad (1)$$

ويعرف تحويل لابلاس للمشتقة الثانية كالاتي:

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-px} \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-px} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \left[\frac{dy}{dx} e^{-px}\right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \frac{dy}{dx} e^{-px} dx$$

ومن العلاقة (١) يكون

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} = -y^{(1)}(0) + p(py) - y(0)$$

من هذا نحصل على

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} = p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y^{(1)}(0) \quad (2)$$

حيث $y(0)$ هي قيمة $y(x)$ محسوبة عند x

$= 0$ و $y^{(1)}$ هي قيمة $\frac{dy}{dx}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$.

والصيغة العامة هي

$$L\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = p^n \bar{y}(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y^{(1)}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0) \quad (3)$$

حيث $y^{(r)}(0)$ هي قيمة $\frac{d^r y}{dx^r}$ محسوبة أيضا عند $x = 0$ و $r = 0, 1, \dots, n-1$.

٥ - تطبيقات تحويل لابلاس :

سوف نستخدم تحويل لابلاس ومعكوسة في حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية والتكاملية .

أ- حل المعادلات التفاضلية العادية:

كتطبيق لتحويلات لابلاس سندرس في الأمثلة الآتية كيفية إيجاد الحل للمعادلة التفاضلية العادية وذلك باستخدام تحويلات لابلاس.

مثال:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية العادية

$$\text{حيث } y(0) = 1$$

الحل:

بالتأثير بمؤثر لابلاس على طرفي المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 2L\{y(x)\} = L\{\cos x\}$$

لدينا

$$L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = p\bar{y}(p) - y(0)$$

$$L\{y(x)\} = \bar{y}(p)$$

$$L\{\cos x\} = \frac{p}{p^2 + 1}$$

فنحصل على

$$py(p) - y(0) + 2y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

وبالتالى فإن

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{y(0)}{(p+2)}$$

ولكن من الشروط الابتدائية $y(0) = 1$ نحصل على :

$$\bar{y}(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2+1)} + \frac{1}{(p+2)}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن

$$\frac{p}{(p+2)(p^2+1)} = -\frac{2}{5} \left(\frac{1}{p+2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1+2p}{p^2+1} \right)$$

ومنها

$$\begin{aligned} \bar{y}(p) &= -\frac{2}{5} \left(\frac{1}{p+2} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1+2p}{p^2+1} \right) + \frac{1}{p+2} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) + \frac{2}{5} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{1}{p+2} \right) \end{aligned}$$

وباستخدام مؤثر لابلاس العكسى نحصل على

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{5} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2+1} \right\} + \frac{2}{5} L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2+1} \right\} + \frac{3}{5} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+2} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \frac{3}{5} e^{-2x} \end{aligned}$$

ويكون حل المعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y(x) = \frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \frac{3}{5} e^{-2x}$$

مثال

حل المعادلة $y'' + y = x$ و $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

الحل:

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين

$$L\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} + L\{y(x)\} = L\{x\}$$

وبالتالي فإن

$$p^2 \bar{y}(p) - py(0) - y'(0) + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية

$$p^2 \bar{y}(p) - p + 2 + \bar{y} = \frac{1}{p^2}$$

وعليه فإن

$$\bar{y} = L\{y\} = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} + \frac{p - 2}{p^2 + 1}$$

بالتحليل إلى كسور جزئية فنحصل على

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1} \\ &= \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1} \end{aligned}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نحصل على

$$y = L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1}\right\}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة على الصورة

$$y = x + \cos x - 2 \sin x$$

مثال:

حل المعادلة

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2x}, \quad y(0) = -3, y'(0) = 5$$

الحل:

باستخدام مؤثر لابلاس على المعادلة نحصل على

$$L\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} - 3L\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2x}\}$$

وبالتالي

$$\{p^2 y - py(0) - y'(0)\} - 3\{p\bar{y} - y(0)\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

وباستخدام الشروط الابتدائية فنجد أن

$$\{p^2 \bar{y} - 3p - 5\} - 3\{p\bar{y} + 3\} + 2\bar{y} = \frac{4}{p-2}$$

$$\bar{y} = \frac{4}{(p^2 - 3p + 2)(p - 2)} + \frac{14 - 3p}{p^2 - 3p + 2}$$

وعلى ذلك

$$\bar{y} = \frac{-3p^2 + 20p - 24}{(p-1)(p-2)^2}$$

وبالتحليل إلى كسور جزئية نجد أن :

$$\bar{y} = \frac{-7}{p-1} + \frac{4}{p-2} + \frac{4}{(p-2)^2}$$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي فنحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة

على الصورة

$$y = -7e^x + 4e^{2x} + 4xe^{2x}$$

الباب السادس حل المعادلات التفاضلية باستخدام المتسلسلات

هذا الباب سنكتفي باستخدام طريقة تايلور لحل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية في صورة متسلسلة لا نهائية.

مفكوك تايلور للدالة $y=y(x)$ بالقرب من $x=x_0$ هو:

$$y(x) = y(x_0) + (x-x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} y^{(k)}(x_0)$$

إذا وضعنا $x_0=0$ في مفكوك تايلور فإننا نحصل على مفكوك ماكلورين:

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!} y''(0) + \frac{x^3}{3!} y'''(0) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} y^{(k)}(0)$$

ولحل المعادلة التفاضلية $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0$

نحسب المقادير $y''(x_0), y'''(x_0), y^{(4)}(x_0), \dots$ بمعلومية $y(x_0), y'(x_0)$ وذلك بالتفاضل المتتالي والتعويض عن $x=x_0$ ، وباستخدام مفكوك تايلور نحصل على y التي هي حل للمعادلة التفاضلية المعطاه.

مثال (١): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' = x^2 + y^2 \quad \text{علماً بأن} \quad y(0) = y'(0) = 1$$

الحل:

$$\begin{aligned}
 y'' &= x^2 + y^2 & \therefore y''(0) &= 1 \\
 y''' &= 2x + 2yy' & \therefore y'''(0) &= 2(1)(1) = 2 \\
 y^{(4)} &= 2 + 2yy'' + 2y'^2 & \therefore y^{(4)}(0) &= 2 + 2(1)(1) + 2(1) = 6 \\
 y^{(5)} &= 2yy''' + 6y'y'' & \therefore y^{(5)}(0) &= 2(1)(2) + 6(1)(1) = 10 \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 1 + x + \frac{x^2}{2!}(1) + \frac{x^3}{3!}(2) + \frac{x^4}{4!}(6) + \frac{x^5}{5!}(10) + \dots \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{12} + \dots
 \end{aligned}$$

مثال (٢): اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - (x - 2)y' + 2y = 0 \quad \text{بالقرب من } x = 2$$

الحل:

$$y(2) = c_1, \quad y'(2) = c_2 \quad \text{نفرض أن}$$

$$y''(2) = -2y(2) = -2c_1 \quad \text{بذلك يكون}$$

بتفاضل المعادلة التفاضلية n من المرات باستخدام نظرية ليبنز نجد أن:

$$y^{(n+2)}(x) - (x - 2)y^{(n+1)}(x) - ny^{(n)}(x) + 2y^{(n)}(x) = 0$$

بالتعويض عن $x = 2$ نحصل على:

$$y^{(n+2)}(x) = (n - 2)y^{(n)}(x),$$

$$y^{(3)}(x) = -y'(x) = -c_2, \quad y^{(4)}(x) = 0,$$

$$y^{(5)}(x) = y'''(x) = -c_2, \quad y^{(6)}(x) = 0, \dots$$

مثال (٣): اوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$xy'' + (x+1)y' + 2y = 0$$

في صورة متسلسلة لانهاية بالقرب من $x=0$ إذا كانت $y(c)=0$.

الحل:

بتفاضل هذه المعادلة n من المرات مستخدما نظرية ليبنز نحصل على

$$xy^{(n+2)}(x) + (1+n+x)y^{(n+1)}(x) + (n+2)y^{(n)}(x) = 0$$

ومنها نحصل على العلاقة:

$$y_{(0)}^{(n+1)} = -\frac{n+2}{n+1} y_{(0)}^{(n)}$$

$$\therefore y'(0) = -2y(0) = -2c, \quad y''(0) = \frac{-3}{2} y'(0) = 3c$$

$$y(0) = \frac{-4}{3} y''(0) = -4y(0) = -4c, \quad y^{(4)}(0) = -5c$$

وبالتعويض في مفكوك ماكلورين نحصل على

$$y = c \left[1 - 2x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{4}{3!}x^3 - \frac{5}{4!}x^4 + \dots \right]$$

حيث c ثابت اختياري.

وبما أن المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية فيكون هذا الحل غير كامل (عام) لأنه لا يحتوي إلا على ثابت اختياري واحد.