

Kingdom of Saudi Arabia
Ministry of Education
Qassim University
College of Science
Department of Physics



المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم
جامعة القصيم
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

أستاذ المقرر: د.

10/31/2025

		الساعات المكتبية
--	--	------------------

		أوقات المحاضرات
--	--	-----------------

الأهداف التعليمية للمقرر

الهدف الرئيسي:

فهم المبادئ الأساسية للإحصاء الحراري وتطبيقها في تفسير السلوك المايكروسكوبي للأنظمة الفيزيائية بالاعتماد على الخصائص المايكروسكوبية للجسيمات، وذلك من خلال الربط بين المفاهيم الإحصائية والقوانين الحرارية.

الأهداف التفصيلية:

(1) شرح المفاهيم الأساسية في الفيزياء الإحصائية

(2) تطبيق المفاهيم الإحصائية

(3) تحليل الأنظمة الفيزيائية

(4) فهم الأساس الكمي للخصائص الحرارية

■ ■ مصادر التعلم:

□ أساسيات الفيزياء الحرارية والإحصائية، تأليف إبراهيم ناصر وآخرون.

□ الإحصاء الكمي، تأليف إبراهيم محمد.

□ D. Nasser – Nature of Thermodynamics.

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل الأول: الديناميكا الحرارية الإحصائية

إن الهدف الأساسي للإحصاء الديناميكي الحراري هو: تقديم نظرية جسيمية نستطيع من نتائجها تفسير خواص الاتزان للنظام العيني.

الفكرة الرئيسية هنا هي البحث عن دالة تعبر عن الكثافة الاحتمالية، وندعوها دالة الكثافة الاحتمالية (Probability density function) ليتم تطبيقها على تجمعات كبيرة من الجسيمات المتطابقة، ولذلك سوف نتعامل مع النظام الديناميكي الحراري المجهرى على أنه كمية من المادة عدد جسيماتها

هائل

(N)، يقارب عدد أفوجادرو (N_A) بمستويات مجهرية متغيرة وله خواص عينية مميزة، ويبنى الإحصاء الديناميكي الحراري على الفرض الأساسي

التالي وهو:

"أن وجود الجسيمات بكل مستوى من المستويات المجهرية لمجموعة معزولة لها احتمالات متساوية"

نموذج العملة والتوزيع الأكثر احتمالاً

نبدأ هنا بتجربة بسيطة سوف نستخلص منها بعض المصطلحات الإحصائية الأخرى التي سوف نخدمنا في دراسة الفيزياء الإحصائية، نبدأ بتجربة رمي عملة معدنية واحدة بالهواء، عند سقوط العملة على الأرض بحرية، نعلم مسبقاً أننا سوف نحصل على الحالة العينية للحدث وهي صورة لأعلى، ونرمز لها بالحرف H ، أو الحالة العينية الأخرى للحدث وهي كتابة لأعلى، ونرمز لها بالحرف T احتمال الحصول على أي من الحدثين هو 50% وهذا ناتج من أن :

فرض احتمال الحصول على الحدث كتابة لأعلى هو (P)

ونعلم أن $P(T)+P(H)=1$

ولذلك فإن $P(T)=P(H)=1/2$

دعونا ندرس نتائج رمي أربع عملات، متطابقة ولكن مميزة (ويمكن التمييز بينها عن طريق ترقيمها بعدد أو اللون مثلاً) مع استخدامنا للرموز التالية:

الرمز	المعنى
K	تعبّر عن ترقيم الحالات العينية
$N_1 k = N H k$	العدد الكلي لحالات الحصول على الحدث صورة (H) بالمستوى العيني K
$N_{2k} = N_T k$	العدد الكلي لحالات الحصول على الحدث كتابة (T) بالمستوى العيني K
ωk	احتمالية الديناميكا الحرارية $\equiv$ عدد الحالات المجهرية للمستوى العيني K
$\Omega = \sum_{K=1} \omega K$	العدد الكلي للحالات المجهرية
$P_k = \frac{\omega k}{\Omega}$	الاحتمالية الحقيقية للمستوى العيني K

جدول (1): الحالات العينية والمجهرية لأربع عملات متطابقة ومتميزة:

الترقيم	الحالات العينية		الحالات المجهرية				الاحتمال	
	N_1k	N_{2k}	العملة 1	العملة 2	العملة 3	العملة 4	ω_k	$P_k = \frac{\omega_k}{\Omega}$
1	4	0	H	H	H	H	1	1/16
2	3	1	H	H	H	T	4	4/16
			H	H	T	H		
			H	T	H	H		
			T	H	H	H		
3	2	2	H	H	T	T	6	6/16
			T	T	H	H		
			H	T	H	T		
			T	H	T	H		
			H	T	T	H		
			T	H	H	T		
4	1	3	H	T	T	T	4	4/16
			T	H	T	T		
			T	T	H	T		
			T	T	T	H		
5	0	4	T	T	T	T	1	1/16

ولحساب المتوسط (أو معدل) الحصول على الحدث N_j
نستخدم المعادلة:

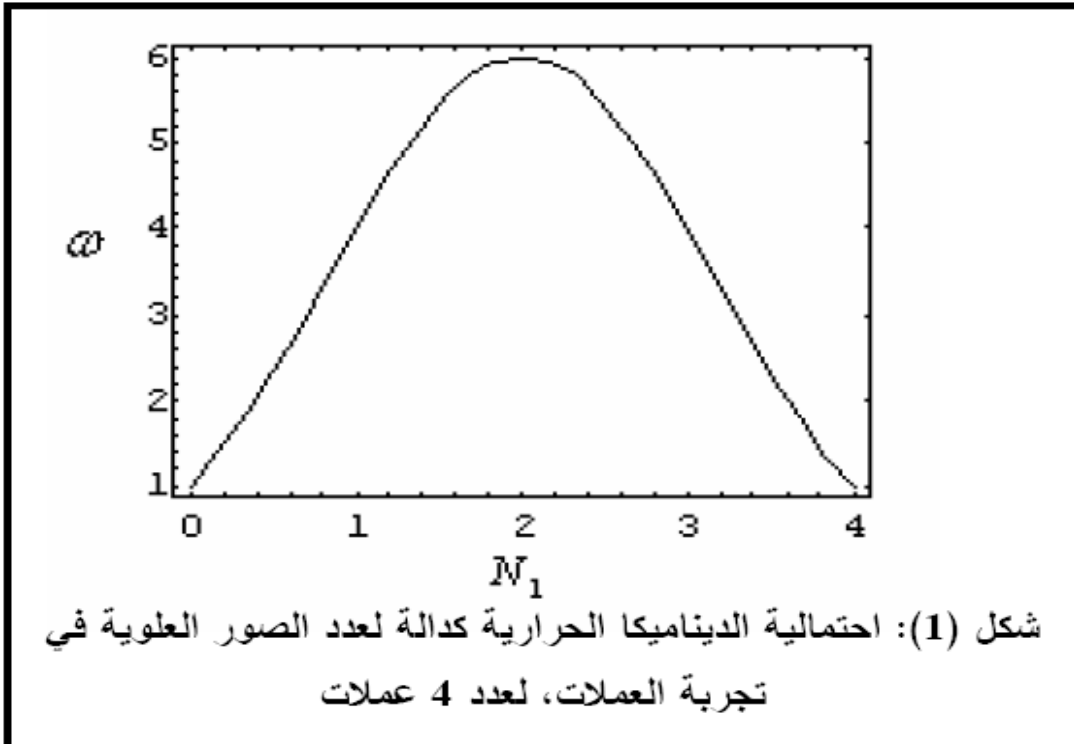
$$\overline{N_j} = \frac{\sum_k N_{jk} \omega_k}{\Omega} = \sum_k N_{jk} \frac{\omega_k}{\Omega} = \sum_k N_{jk} p_k$$

لنجد أن متوسط الحصول على الحدث صورة H هو:

$$\overline{N_1} = \frac{1}{16} \{ (4 \times 1) + (3 \times 4) + (2 \times 6) + (1 \times 4) + (0 \times 1) \} = 2$$

كما هو متوقع الحصول عليه من رمي اربع عملات

9



وحتى تصبح النتائج منطقية ويعتمد عليها، يجب أن نتعامل مع عدد لانهائي من العملات. وقبل أن نتعامل مع عدد لانهائي من العملات دعونا نسأل هل توجد طريقة لحساب ω_k بدون أن نلجأ إلى جدولة النتائج المتوقعة؟ والإجابة نعم. يتم ذلك باستخدام قوانين التباديل انظر الملحق (c) فنجد أنه لعدد من العملات المميزة N فإن عدد الطرق لاختيار (للحصول على) عدد N_k من الصور وعدد

$$\omega_k = \binom{N}{N_k} = \frac{N!}{N_k!(N-N_k)!} \text{ من الكتابة تعطى بالعلاقة:}$$

ومن الجدول السابق نجد أن أعلى معدل توزيع لعدد الحالات المجهرية، $\omega_k = \text{maximum}$ ، تحدث عندما $N_1 = N_2 = N/2$ ومنها نجد أن $\omega_3 = 6$ وسوف نطلق على $\tilde{\omega}$ التوزيع الأكثر احتمالاً

Most probable Distribution

مثال احسب ω للقيم $N=4,8,1000$

$$\tilde{\omega} = \binom{N}{N/2} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)!\left(\frac{N}{2}\right)!}$$

الحل : باستخدام المعادلة (4)

باستخدام آلة حاسبة عادية، نستطيع تكوين الجدول التالي:

N	$N_1 = N/2$	$\tilde{\omega}$
4	2	$\frac{4!}{2! 2!} = 6$
8	4	$\frac{8!}{4! 4!} = 70$
1000	500	$\frac{1000!}{500! 500!} \approx 10^{300}$

تقريب استرلنج

فكيف نستخدم هذا التقرير لحساب قيمة $\tilde{\omega}$ ؟ $\tilde{\omega} = \frac{1000!}{(500!)^2}$

الطريقة هي أن نأخذ لوغار يتم الطرفين فنجد أن: $\ln(\tilde{\omega}) = \ln(1000!) - 2 \ln(500!)$

باستخدام تقريب استرلنج نجد أن:

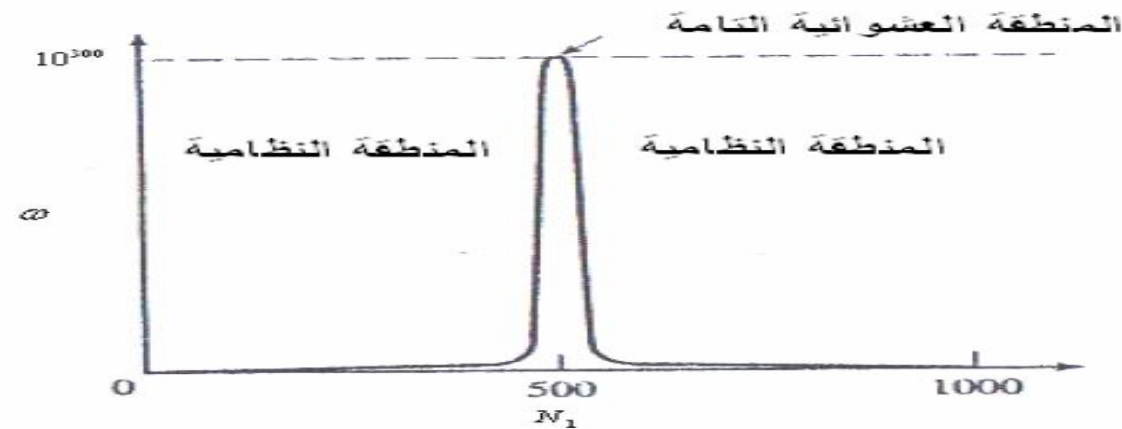
$$\ln(\tilde{\omega}) = 1000^x \ln^{(1000)} - 1000 - 2[500x \ln(500) - 500]$$

$$1000 \ln \left(\frac{1000}{500} \right) = 693 \cdot$$

$$\ln^1 0(\tilde{\omega}) = (\ln 10^e) \ln(\tilde{\omega}) = 0.4343 \times 693 = 300 \cdot$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega} = 10^{300}$$

من المثال السابق نستطيع أن نرسم الشكل (3) لعدد 1000 من العملات لنجد القمة المطابقة، لحدوث عدد الوجوه الأكثر احتمالاً تزداد حدثها.



شكل (3): احتمالية الديناميكا الحرارية كدالة لعدد الصور العلوية لعدد 1000 من العملات

والآن دعونا نستخلص بعض النتائج المهمة من التجربة السابقة لذلك عند رسم ω كدالة في عدد الصور الناتجة " N_1 " وهي كالتالي:

1- ω تأخذ قيمة عظمى، $\tilde{\omega}$ عندما $N_1 = N, 2$

2- مع زيادة N نجد أن $\tilde{\omega}$ تأخذ أرقاماً فلكية.

3- بداية ونهاية المنحنى دائماً تكون القيمة $\omega = 1$.

4- الحدث، أن عدد العملات ذات الصور لأعلى مستوى تتساوى مع عدد العملات ذات الكتابة لأعلى، أي بنسبة 50-50، نتيجة تعتبر متوقعة وذلك مع زيادة عدد العملات N .

5- من المنحنى نجد أن منطقة النظامية، حيث $|\omega - \tilde{\omega}| \gg 0$ تقل احتمالية تواجدها مع زيادة عدد العملات N

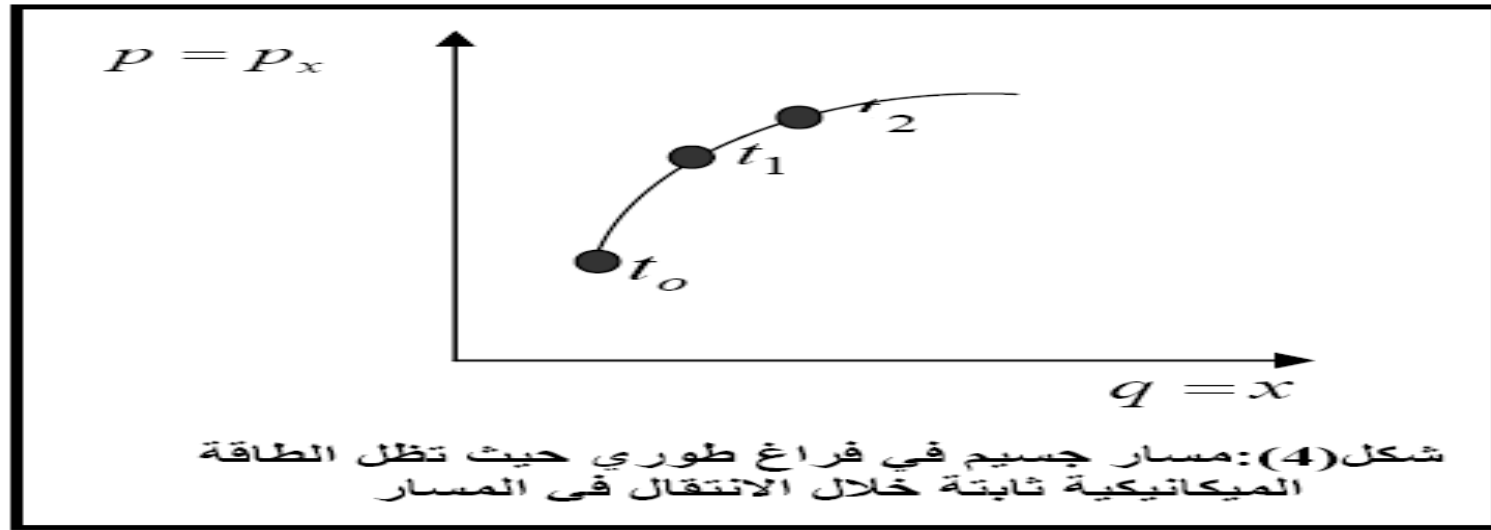
6- من النتائج السابقة، ومن المنحنى مع الزيادة الكبيرة للعدد N نستطيع أن نستنتج أن المجموع الكلي للحالات المجهرية يتساوى تقريباً مع $\tilde{\omega}_\omega \approx \sum \omega_k = \Omega$

7- المنحنى أيضاً يعطينا طريقة بسيطة لحساب $\tilde{\omega}$ وكيف؟ نحن نعلم أن الميل عند قمة المنحنى مساو للصفر، ولإيجاد $\omega(N_1)$ ، نحسب تفاضل الدالة ω_k بالنسبة إلى N_1 نساوي النتيجة بالصفر، بهذا نستطيع أن نحسب N_1 عند $\omega = \tilde{\omega}$ ومنها نستطيع أيضاً حساب N_2 النتيجة بهذه الطريقة تعطينا الحالة العينية

الفراغ الطوري والمستويات الكمية (Phase space and quantum states)
معادلات الحركة القانونية (Canonical equations of motion) معادلات هاميلتون

$$\frac{dp}{dt} = F = - \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)_p = - \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)_p \quad (A)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m} = - \left[\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{L} \frac{p^2}{2m} \right]_q = - \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right) q^{(B)}$$



حركة جسيم في الفراغ والتي تتطلب الآن ثلاث إحداثيات مكانية (x, y, z) بالإضافة إلى ثلاث إحداثيات أخرى مرافقة لها وهي كمية الحركة الخطية (p_x, p_y, p_z)

$$\Delta_x \Delta_y \Delta_z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3$$

لفراغ ثنائي الأبعاد فإن عدد المستويات "n" المسموح بها للجسيم تحسب من العلاقة

$$n = \frac{t_0}{\Delta_x} \frac{t_{area}}{\Delta p_x} = \frac{x_0 p_0}{h}$$

ولفراغ سداسي الأبعاد نجد أن: $n = \frac{v_r v_p}{h^3} \Delta_x \Delta y \Delta_z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$

حيث v_r هو الحجم في الفراغ الكارتيزي، v_p هو الحجم في فراغ كمية الحركة. وعدد المستويات الكمية المسموح بها للجسيم لعنصر الحجم في فراغ سداسي الأبعاد هو:

$$d_n = \frac{d_x d_y d_z d p_x d p_y d p_z}{h^3} = \frac{d^3 r d^3 p}{h^3}$$

حيث: d^3r هو عنصر الحجم في الفراغ الكارتيدي، d^3p هو عنصر الحجم في فراغ كمية الحركة، ومن هنا نستطيع القول: أن عدد المستويات المسموح بها للجسيم خلال مسافة معينة، بأي إحداثيات طورية، تتناسب مع هذه المسافة، بمعنى أنه إذا كانت q هي الإحداثيات الطورية

$$n \propto q$$

مثال: احسب عدد المستويات الكمية المسموح بها للحالات التالية:

1- جسيم يتحرك في بعد واحد في مسافة طولها $10^5 m$ وكمية حركته الخطية لها القيمتان $10^{-28} kg s^{-1}$ و $10^{-28} kg s^{-1}$

2- بروتون بداخل النواة (نصف قطرها $10^{-14} m$) وكمية حركته الخطية هي $10^{-22} kg s^{-1}$

الحل :

$$1- \text{ من المعادلة (12) نجد أن:}$$

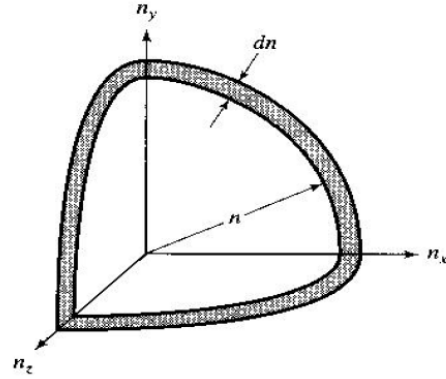
$$n = \frac{x_0 p_0}{h} = \frac{(10^5 m)(2 \times 10^{-28} kg s^{-1})}{(6.626 \times 10^{-34} J s^{-1})} = 3000$$

2- ومن المعادلة (12) نجد أن :

$$n = \frac{v_r v_p}{h^3} = \frac{\left(\frac{4}{3} \pi^2 C |_0 - 14 m\right)^3 \left(\frac{4}{3} \pi^2 (10^{-22} kg s^{-1})^3\right)}{(6.626 \times 10^{-34} J s^{-1})^3} = 600$$

كثافة المستويات (Density of states)

ينصب اهتمامنا هنا على إيجاد كثافة المستويات $g(\varepsilon)$ لما لها من أهمية لحساب التوزيع الإحصائي بالأبواب التالية:
إذا افترضنا أن هناك جسم كروي كما في الشكل من خلال ميكانيكا الكم يمكن إعطاء طاقة مستوياته من خلال المعادلة التالية:



شكل (10): قشرة ذات سمك dn لجزء مقدار $\frac{1}{8}$ لكرة نصف

قطرها n للإحداثيات الصحيحة والموجبة (n_x, n_y, n_z)

ولإيجاد عدد المستويات $n(\varepsilon)$ التي تتراوح طاقتها من الصفر إلى ε ، يجب أن نوجد الحجم المساوي لحجم $\frac{1}{8}$ من الحجم

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi n^3 \right) = \frac{\pi}{6} v \left(\frac{8m}{h^2} \right)^{3,2} \varepsilon_{3,2}$$

الكلية لكرة، لذلك نجد أن: $\varepsilon_{3,2}$

وعدد المستويات المحصورة بين قيمتي الطاقة ε و $\varepsilon + d\varepsilon$ تأتي من تفاضل المعادلة الأخيرة لتصبح:

$$d_n(\varepsilon) = 4\pi v \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3,2} \varepsilon^{1,2} d\varepsilon$$

وسوف نتعامل مع كثافة المستويات وهي:

$$g(\varepsilon) = \frac{dn^{(\varepsilon)}}{d\varepsilon} = 4\pi v \left(\frac{rm}{h^2}\right)^{3,2} \varepsilon^{1,2} = G_S v \varepsilon^{1,2}$$

والتي تمثل عدد المستويات لوحدة الطاقة التي لها نفس الطاقة ε ، حيث عرفنا الثابت: $G_S = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3,2}$

$$q(p) = g(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{v}{h^3} 4\pi p^2$$

ولهذه المعادلة تأخذ في اعتبار الحركة الانتقالية فقط للجسيم، ولكن في ميكانيكا الكم توجد للجسيم حركة مغزلية ذاتية "s"، وهذه يجب أن تأخذ في الاعتبار بضرب المعادلة الأخيرة بقيمة التعددية $g_s = (2s + 1)$ ومن المفيد أحياناً أن نعبر عن $g(\varepsilon)$ بدلالة كميات أخرى

$$p = \sqrt{2m\varepsilon} \text{ الحركة الخطية}$$

$$g(P) = g(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{v}{h^3} 4\pi p^2$$

وتعرف $g(q)$ بأنها عدد المستويات لوحدة كمية الحركة الخطية المحصورة بين قيمتي كمية الحركة p و $p + dp$ التي لها نفس كمية الحركة الخطية.

وبدلالة التردد $v = \frac{c}{\lambda} = \frac{pc}{h}$ $g(v) = g(P) \frac{dp}{dv} = \frac{v}{c^3} 4\pi v^2$ وتعريف $g(v)$ بأنها عدد المستويات لوحدة التردد المحصورة بين قيمتي التردد v و $v + dv$ والتي لها نفس التردد. $g(\omega) = \frac{v}{(2\pi)^3 c^3} \omega^2$ $\omega = 2\pi v$

وبدلالة التردد الزاوي وتعريف $g(\omega)$ بأنها عدد المستويات لوحدة التردد الزاوي المحصورة بين قيمتي التردد ω وباستخدام العلاقة: $v = \frac{c}{\lambda}$ $q(\lambda) = \frac{4\pi}{\lambda^4} v$

الجسيمات المتطابقة وغير المميزة

سوف نتعرض هنا للأنظمة الفيزيائية التي تحتوي على جسيمين متطابقين أو أكثر.

والجسيمات المتطابقة تعني هنا الجسيمات التي تمتلك نفس الخواص الفيزيائية (كتلة، شحنة، ...).

وبالتالي فنحن لا نستطيع أن نميز بينها بواسطة أي قياسات معملية، أو حتى ترقيمها، كما يحدث

في الفيزياء الكلاسيكية، أن مبدأ عدم التمييز (principle of indistinguishability)

يخص جميع الجسيمات غير العينية (المجهرية) مثل الإلكترون والبروتون والفوتون، إلخ.

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل الثاني: الديناميكا الحرارية الإحصائية للحالات المجهرية

في هذا الباب نستعرض تعريفاً للأنثروبي الإحصائية وذلك باستخدام تعريف الحالات المجهرية. ومن ثم نعرض حساب الأنثروبي لأنظمة بسيطة تحتوي على عدد بسيط من الجسيمات ومستويات الطاقة. وسوف نستعرض التبريرات لهذا التعريف.

كنا قد تعرضنا سابقاً لتعريف الأنثروبي على أنه مقياس لدرجة عشوائية النظام. وذكرنا أن عشوائية جزيئات الغاز تكون أكبر من عشوائيتها في الحالة السائلة (لنفس المادة)، وأيضاً عشوائية جزيئات الحالة السائلة أكبر من عشوائية الحالة الصلبة لنفس المادة. وهذا بالطبع ناتج من مدى ترتيب الجزيئات بالمادة.

ونود أن ننوه هنا أن الشرح السابق شرح كيفي (نوعي) وليس كمي أو مقداري، بمعنى أنه لم ينتج عن طريق الحسابات الرياضية أو المعادلات المشتقة. بالتالي فنحن نأمل في إيجاد نموذج رياضي (أو معادلة رياضية) يعتد به لتفسير الأنثروبي بطريقة يسهل التعامل معها ويمكن تطبيقها في الدراسات المختلفة.

ولقد كان العالم بولتزمان هو أول من اقترح الربط بين مبدأ الأنثروبي " S " وبين عدد الحالات المجهرية للنظام " Ω " بالصورة الرسمية:

$$S = k_B \ln \Omega \quad (1)$$

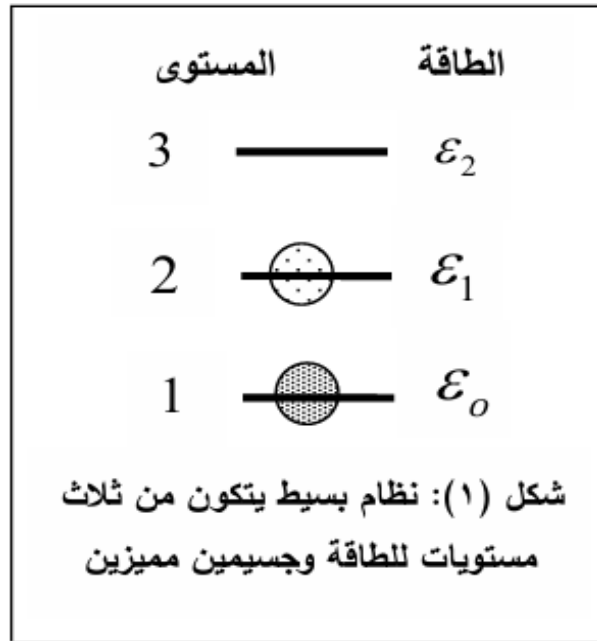
حيث k_B هو ثابت بولتزمان وأن S و Ω يعتبران من خواص الحالة للنظام. فما هو تعريف الحالات المجهرية للنظام؟ هذا ما سوف نوضحه في الفصل التالي. ولكن قبل توضيحه لنا هنا ملاحظتان:

□ المعادلة (1) افتراضية (Hypothetical) ولا يوجد له اشتقاق نظري، وبالتالي سوف نفترض أنها حقيقية. ودرجة صحتها سوف تعتمد على نتائجها ومقارنتها بالقيم العملية الملحوظة.

□ تم تعريف ثابت بولتزمان k_B لأول مرة من خلال هذه المعادلة.

الحالات المجهرية للنظام (Microstate of the system)

قبل أن نبدأ بالتعريف معنى الحالة المجهرية للنظام دعونا نوضح أولا ماذا تعني كلمة حالة النظام: حالة النظام تعرف تحديدا بأنها كيفية ملء مستويات الطاقة لهذا النظام. لتوضيح الصورة دعونا نعتبر نظاما بسيطا كما بالشكل (1)، يتكون من ثلاثة مستويات للطاقة ϵ_i ، $i = 0, 1, 2$ ، وجسيمين مميزين. في هذا النظام دعونا نعرف حالة النظام بالأرقام $(1, 1, 0)$ وهذه الأرقام من اليسار لليمين تدل على أنه لا يوجد جسيم بالمستوى الأول (ϵ_0) وجسيم بالمستوى الثاني (ϵ_1)، والمستوى الثالث (ϵ_2) فارغا. وفي حالة أنه تم إثارة أحد الجسيمين نحصل على حالات النظام بالأرقام $(1, 0, 1)$ أو $(0, 1, 1)$.



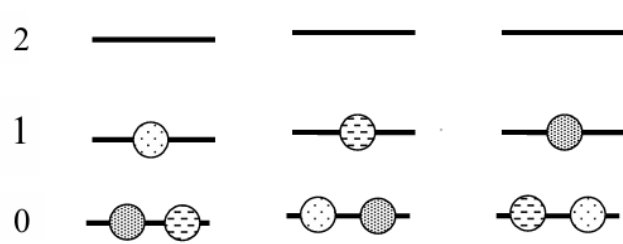
والآن نحن بصدد تعريف الحالة المجهرية لحالة النظام $(1, 1, 0)$ ، وكما هو مبين في الشكل (2)، يتكون من حالتين مجهريتين، وهما الحالات المحتملة الناتجة من تبديل الجسيمين بالمستوى الأول والثاني لهذا النظام.

شكل (2): الحالتان المجهريتان المحتملتان لحالة النظام $(1, 1, 0)$.

نستطيع الآن تحديد التعريف الرسمي للحالة المجهرية كما يلي: "الحالة المجهرية هي ترتيب الجسيمات خلال حالة معرفة (معطاة) للنظام بالتالي فإن عدد الحالات المجهرية Ω ، هي عدد الطرق الواضحة لترتيب فئة من الجسيمات المميزة لتحقيق حالة عينية معينة".

مثال عدد 1: ما هو عدد الحالات المجهرية لحالة النظام (2,1,0) الذي يتكون من ثلاث مستويات للطاقة وثلاث جسيمات مميزة؟

المستوى



الحل: المطلوب هنا أن نقوم بوضع جسيمين بالمستوى الأول وجسيم واحد بالمستوى الثاني وترك المستوى الثالث فارغاً. وبتبديل الأجسام الثلاثة على مستويات الطاقة الأولى والثانية فقط، كما بالشكل (3)، نجد أننا سوف نحصل على ثلاث حالات مجهرية فقط. هذا مع إهمال ترتيب الجسيمات بكل مستوى.

شكل (3): الحالة المجهرية المحتملة لحالة النظام (2,1,0).

مما سبق شرحه سوف نسترجع أحد النظريات الإحصائية المهمة ألا وهي:

نظرية: مع وجود الشرط $N = \sum_i n_i$ فإن عدد الطرق لتوزيع عدد N من الجسيمات المميزة على عدد j من المستويات بحيث يوضع n_1 من الجسيمات في المستوى الأول، و n_2 من الجسيمات في المستوى الثاني، وهكذا حتى نحصل إلى وضع n_j من الجسيمات في المستوى الأخير j هو:

$$(2) \quad \omega \{n_i\} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_j!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^j n_i!}$$

الإثبات:

$$\omega_1 = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!}$$

نبدأ أولاً بالمستوى الأول، فنجد أن عدد الطرق لاختيار N من n_1 ووضعهم في المستوى هو

$$\omega_2 = \binom{N - n_1}{n_2} = \frac{(N - n_1)!}{n_2!(N - n_1 - n_2)!}$$

وبالمستوى الثاني، نجد أن عدد الطرق لاختيار n_2 من $(N - n_1)$ ووضعهم في المستوى هو

$$\omega_3 = \binom{N - n_1 - n_2}{n_3} = \frac{(N - n_1 - n_2)!}{n_3!(N - n_1 - n_2 - n_3)!}$$

وبالمستوى الثالث، نجد أن عدد الطرق لاختيار n_3 من $(N - n_1 - n_2)$ ووضعهم في المستوى هو

وننزل على نفس النمط حتى نصل للمستوى الأخير. حيث إن هذه الاختيارات عملية منفصلة فإن العدد الكلي يصبح:

$$\omega\{n_i\} = \omega_1 \times \omega_2 \times \omega_3 \times \cdots \times \omega_j = \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_j!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^j n_i!}$$

حيث الرمز Π يدل على مضروب الأعداد، بمعنى أن $\prod_{i=1}^r n_i! = n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_r!$ وهذا هو المطلوب.

ملاحظة مهمة: في دراستنا تعرف القيمة ω_i ، والتي تعبر عن عدد الطرق المجهرية المختلفة لحالة عينية معينة بأنها "احتمالية الديناميكا الحرارية" (Thermodynamic Probability) أو الثقل الإحصائي (Statistical weight). وتأخذ ω_i القيم من صفر إلى قيم فلكية، ولذلك فهي تختلف عن الاحتمالية الحقيقية p_i والتي تعرف بالعلاقة:

$$(3) \quad p_i = \frac{\omega_i}{\sum_j \omega_j}, \quad 0 \leq p_i \leq 1$$

ومجموعها الكلي يعطى:

$$\sum_{i=1}^J p_i = \sum_{i=1}^J \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^J \omega_i} = \frac{\sum_{i=1}^J \omega_i}{\sum_{i=1}^J \omega_i} = 1$$

مثال عدد 2: ما هو عدد الحالات المجهرية لحالة النظام (4, 3, 2, 1, 0)؟

الحل: من الحالة (4, 3, 2, 1, 0) نجد أن عدد المستويات هي خمسة، وعدد الجسيمات N تحسب من الترتيب المعطى وهو:

$$N = \sum_{n_i=1}^5 n_i = 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$$

وباستخدام القانون الإحصائي نجد أن عدد الحالات المجهرية بهذه الحالة هي:

$$\omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! n_4! n_5!} = \frac{10!}{4! 3! 2! 1! 0!} = 12600$$

مثال عدد 3: أحسب الإنتروبي للمثال السابق.

$$S = k_B \ln \Omega$$

الحل: باستخدام القانون:

$$= (1.38 \times 10^{-23} \text{ Jk}^{-1}) \times \ln(12600) = 1.30 \times 10^{-22} \text{ Jk}^{-1}$$

تعليق: بالطبع فإن قيمة الإنتروبي هنا صغيرة جدا. ولكن إذا ضربنا هذا الرقم بعدد افوجادرو، وهو عدد الجسيمات بالمول الواحد، وقسمناه على عدد الجسيمات بالمثال وهو $N = 10$ فإننا سنحصل على الانتروبي لكل مول من الجسيمات وهو $7.8 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

والآن قبل أن نبدأ بمثال آخر دعونا نتحقق من بعض خواص الإنتروبي الإحصائية:

$$\square \text{ الخاصية الأولى تنص على أن: } \lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

ونعلم أنه عند درجة الحرارة المنخفضة، والتي تقترب من درجة الصفر المطلق $T \rightarrow 0$ ، نجد أن جميع الجسيمات تتجمع بالمستوى الأرضي (أدنى مستوى).

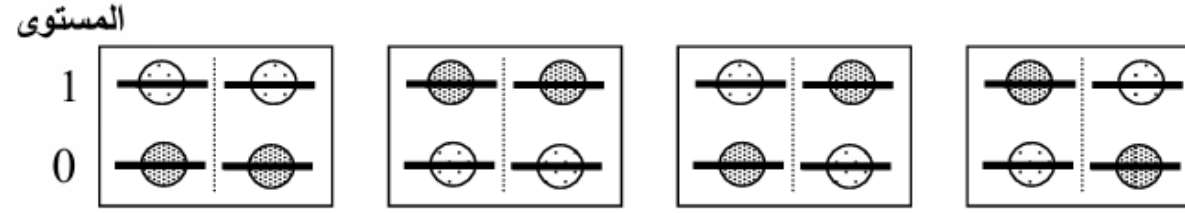
$$\lim_{T \rightarrow 0} S = k_B \ln \Omega = k_B \ln 1 = 0$$

وحيثما تصبح الجسيمات بمستوى وحيدة، فإن عدد الحالات المجهرية Ω تصبح 1، بالتالي فإن:

وهذا يوضح أن التعريف الإحصائي متوافق مع القانون الثالث للديناميكا الحرارية.

$$\square \text{ الخاصية التجميعية للأنتروبي (Extensive “Additive” property)}$$

وتعني أنه إذا تضاعف حجم النظام فإن الأنتروبي أيضا تتضاعف بنفس القيمة. ولدراسة هذه الصفة دعونا أن نضاعف حالة النظام البسيطة (1, 1, 0) والتي تتكون من ثلاث مستويات وجسيمين مميزين. وسوف نكتفي باستعمال مستويين فقط حيث أن المستوى الثالث فارغ.



وبمضاعفة حجم النظام فإننا نضاعف أيضا عدد الجسيمات والمستويات، فنحصل على نسختين متطابقتين من الجسيمات ومن المستويات. مع ملاحظة أننا سوف نتعامل مع كل نسخة على حدة، ولن نسمح بتبادل الجسيمات بين النسخ المختلفة. وكما يتضح من الشكل فإننا حصلنا على أربع حالات مجهرية بالتالي:

فإنه لجسيمين نجد أن الانتروبي:

$$S = k_B \ln 2$$

ولأربعة جسيمات نجد أن الانتروبي:

$$S = k_B \ln 4 = k_B \ln 2^2 = 2k_B \ln 2$$

ولعدد N من الجسيمات نجد:

$$S = k_B \ln 2^N = Nk_B \ln 2$$

من هذا المثال تتضح صفة التضاعف للحالات المجهرية وصفة التجميع للإنتروبي، بمعنى:

$$\Omega_{total} = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$S_{total} = S_1 + S_2,$$

مثال عدد 4: أدرس نظام بسيط، كما بالشكل، يتكون من ثلاث جسيمات " $N = 3$ " مميزة وأربع مستويات للطاقة

تعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i \varepsilon \text{ Joule}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

مع اعتبار أن الطاقة الكلية U تتساوى مع القيم $3 \varepsilon \text{ Joule}$.

الحل: نستطيع أن نميز بين الجسيمات الثلاثة بإعطائهم الرموز A, B, C مع الأخذ في الاعتبار الشروط (القيود) التالية:

جدول (1) جميع الحالات العينية والمجهرية التي تحقق شروط المثال.

k	الحالات العينية				الحالات المجهرية				U	$\omega_k \{n_i\}$	p_k
	n_0	n_1	n_2	n_3	n_0	n_1	n_2	n_3			
1	2	0	0	1	AB	0	0	C	3ε	3	0.3
					AC	0	0	B			
					BC	0	0	A			
2	1	1	1	0	A	B	C	0	3ε	6	0.6
					B	C	A	0			
					C	A	B	0			
					A	C	B	0			
					B	A	C	0			
					C	B	A	0			
3	0	3	0	0	0	ABC	0	0	3ε	1	0.1

$$\sum_{i=0}^3 n_i = 3, \quad U = \sum_{i=0}^3 n_i \varepsilon_i = 3\varepsilon,$$

وباستخدام الرموز التالية: k يعبر عن ترقيم الحالات العينية، n_i عدد الجسيمات بالمستوى i ، ω_k احتمالية الديناميكا الحرارية، p_k الاحتمالية الحقيقية، نستطيع تكوين الجدول (1):

ومن الجدول نجد أن عدد الحالات العينية هي ثلاثة $k = 1, 2, 3$ ، وعدد الحالات المجهرية هي:

$$\Omega = \sum_k \omega_k \{n_i\} = 10$$

ويوجد بالجدول الحالة العينية (1, 1, 1, 0) ، انظر الترقيم العيني $k = 2$ ، ولها أعلى عدد من الحالات المجهرية وهي $\omega_2 = 6$ ولهذا فإن الحالة (1, 1, 1, 0) تسمى أعلى احتمالية عينيه (Most probable microstate).

ولنا هنا وقفة لنستخلص بعض النتائج من جدول (1) وهي:

□ بالرغم من بساطة الأعداد (الجسيمات والمستويات) فإن الحالة (1, 1, 1, 0) والتي تتميز بأعلى عشوائية ممكنة لها أعلى احتمالية عينية.

□ نظرا للقيود المعطاة بالمثال فإنه يوجد أيضا العديد من الطاقات التي لم ندرسها، وتبدأ من الطاقة 0ϵ للحالة (3, 0, 0, 0) وتنتهي بالطاقة 9ϵ للحالة (0, 0, 0, 3). هذه الحالات تعتبر من الحالات النظامية (غير العشوائية) ولذا نجد أن لها أقل حالة مجهرية وهي الواحد.

□ لعدد كبير جدا من الجسيمات في هذا النظام سوف نجد أن الحالة (1, 1, 1, 0) سوف يظهر لها أكبر عدد من الحالات المجهرية وتكون حالة الاتزان للنظام.

□ سوف يستخدم الرمز $\tilde{n}$ للتعبير عن فئة الأعداد للحالة ذات أعلى احتمالية عينية، ولمثالنا هنا نجد أن $\tilde{n} \equiv \{1,1,1,0\}$.

وقد رأينا سابقا بالديناميكا الحرارية أن النظام يميل دائما إلى حالة الاتزان وبالتالي فإن الإنتروبي تزداد. وعند الاتزان تماما تأخذ الإنتروبي قيمة عظمى. وبلاستقراء نجد أن نموذج بولتزمان الإحصائي يقترح علينا أن النظام يتغير تلقائيا في حالات ذات احتمالية عينية منخفضة إلى حالة ذات احتمالية عينية مرتفعة (أعداد كبيرة من الحالات المجهرية). من هنا نستطيع أن نؤكد ان القانون الثاني للديناميكا الحرارية هو نتيجة منطقية لنظرية الاحتمالات. ولذا فإن العالم يتغير كما نراه لأنه يبحث عن حالة أعلى احتمالية! وهي حالة الاتزان! أو الحالة العشوائية! وسوف نستعرض مثال آخر لتوضيح إجابة السؤال: ما هي الحالة المفضلة للنظام؟

جدول (2) جميع الحالات العينية التي تحقق شروط المثال السابق.

الطاقة (10^{-20} Joule)	الحالات العينية				
٤	●				
٣		●			
٢			●●	●	
١		●		●●	●●●●
٠	●●●●●	●●●●	●●●●	●●●	●●
$E_{total}(10^{-20} \text{ J})$	4	1+3	2×2	1+1+2	1+1+1+1
k	1	2	3	4	5

مثال عدد 5: نظام بسيط يتكون من ست جسيمات " $N = 6$ " ومستويات تعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i \times 10^{-20} \text{ Joule}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

إذا استطعنا ترتيب الجسيمات بحيث أن المجموع الكلي للطاقة U يساوي $4 \times 10^{-20} \text{ J}$.

احسب عدد الحالات المجهرية التي تحقق هذه الشروط.

الحل: لحل هذا المثال يجب أن نحدد مستويات الطاقة ونحدد عدد تبادل الجسيمات الستة

بحيث تحقق الشروط المعطاة كما بالجدول (2). ومن الجدول نجد أن عدد الحالات العينية

هي خمس حالات فقط.

دعونا ننظر بتمعن إلى نتيجة المثال السابق. بالرغم من أننا حصلنا على خمس توزيعات عينية مختلفة لها نفس عدد الجسيمات ولها أيضا نفس الطاقة ($E_{total}(10^{-20} \text{ J})$ ، ولكننا نود أن نعرف: ما هو عدد الحالات المجهرية لكل حالة عينية؟ من معلوماتنا السابقة للديناميكا الحرارية، فنحن نتوقع أن أي نظام يتجه للتقليل (mimimize) من طاقة هلمهولتز الحرة، ولذا يجب أن نتأكد من هذه المعلومة، وسوف نحفظ بالحجم ثابتا حتى لا تتغير مستويات الطاقة بتغير الحجم.

مثال عدد 6: للنظام السابق، عين عدد الحالات المجهرية لكل توزيع وأوجد التوزيع الذي يقلل من طاقة هلمهولتز الحرة " $F = U - TS$ "، عند درجة حرارة الغرفة (298.15 K).

الحل: باستخدام حل المثال السابق والقانون:

$$\omega_k = \frac{6!}{n_0! n_1! n_2! n_3! n_4!}$$

نستطيع تكوين الجدول (3):

k	$\{n_0, n_1, n_2, n_3, n_4\}$	ω_k	$S(10^{-23} JK^{-1})$	$U(10^{-20} J)$	$F(10^{-20} J)$
1	{5, 0, 0, 0, 1}	6	2.47	4.00	3.26
2	{4, 1, 0, 1, 0}	30	4.70	4.00	2.60
3	{4, 0, 2, 0, 0}	15	3.74	4.00	2.89
4	{3, 2, 1, 0, 0}	60	5.65	4.00	2.32
5	{2, 4, 0, 0, 0}	15	3.74	4.00	2.89

جدول (3) الكميات الفيزيائية التي تحقق شروط المثال.

ويتضح من الجدول (3) أن الحالة العينية $k = 4$ والتي لها أعلى عدد من الحالات المجهرية، لها أيضا أعلى قيمة للأنتروبي S وأقل قيمة لطاقة هلمهولتز F .

تعليق مهم: لعدد بسيط من الجسيمات نجد أنه من السهل استخدام الطريقة الموضحة في المثال السابق لإيجاد التوزيعات المختلفة، ومنها نحسب أعلى توزيع احتمالي والذي تكون له أقل طاقة حرة. ولكن للأسف فإن هذه الطريقة لا تصلح للتعامل مع نظام حقيقي (نظام عيني) له أعداد فلكية من الجسيمات ومن مستويات الطاقة. ومن حسن حظنا أن عالما مثل بولتزمان قد وفق في إيجاد معادلة لحساب التوزيع الإحصائي لأعداد كبيرة من الجسيمات على مستويات الطاقة. وقد بنى بولتزمان توزيعه الإحصائي على الأسس التالية:

- 1- إيجاد النهاية العظمى لأن تروبي النظام. 2- مع التقيد بشرط أن عدد الجسيمات N يظل ثابت. 3- وأيضا التقيد بشرط أن الطاقة الداخلية للنظام U تظل ثابتة.
- وهذا ما سوف نتعرض له في الفصل التالي.

واجب منزلي: استنتج العلاقة $S = k_B \ln \Omega$

الحل: سنفترض نظامين منفصلين تمام بحائل وهما A و B كما بالشكل. وسنفترض أن لكل نظام منهما الانتروبي والحالات المجهرية الخاصة به، مثل Ω_A, S_A و Ω_B, S_B . وسنفترض أن النظامين تم خلطهما بإزالة الحائل. ولكننا نعلم أن الانتروبي هي كمية شاملة، ومنها نضع:

$$(1) \quad S_{total} = S_A + S_B$$

$$(2) \quad \Omega_{total} = \Omega_A \times \Omega_B$$

ولكننا نعلم أيضا ان الحالات المجهرية هي كميت تضاعفيه بمعنى أن:

$$(3) \quad S = f(\Omega)$$

سنفترض الآن أن S هي دالة في المتغير Ω بالصورة:

$$(4) \quad f(\Omega_{total}) = f(\Omega_A) + f(\Omega_B)$$

من (1) نجد

$$(5) \quad f(\Omega_{total}) = f(\Omega_A \times \Omega_B)$$

ومن (2) نجد

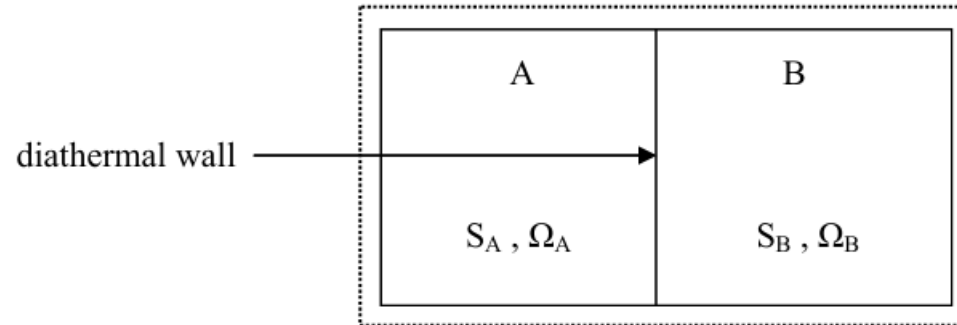
$$(6) \quad f(\Omega_A) + f(\Omega_B) = f(\Omega_A \times \Omega_B)$$

ومن (4) و (5) نجد

وهو المطلوب.

$$S = k_B \ln \Omega$$

المعادلة (6) لا تتحقق إلا إذا استخدمنا الدالة اللوغاريتمية بالشكل:



أمثلة متنوعة

1. افترض وجود كرتان متطابقتان (وغير مميزتان) ويراد وضعهما في أربعة أماكن منفصلة هما (A, B, C, D) . احسب عدد الحالات العينية.

الحل: بترتيب الكرات كما بالجدول التالي نجد أن عدد الحالات العينية هي 10 مع وجود الشرط بأن عدد الكرات بكل حالة عينية يجب أن تكون 2 (لاحظ هنا أن التجميع أفقياً).

k				
1				••
2			••	
3		••		
4	••			
5			•	•
6		•		•
7		•	•	
8	•			•
9	•		•	
10	•	•		
	A	B	C	D

2. افترض وجود جسيमान متطابقان (ومميزان) ويراد وضعهما في ثلاث مستويات للطاقة تعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i \times \varepsilon J, \quad i = 0,1,2$$

إذا استطعنا ترتيب الجسيمات بحيث أن المجموع الكلي للطاقة $U = 2\varepsilon$.

أ- احسب عدد الحالات المجهرية.

ب- الإنتروبي

ت- إذا وضع جسيم مميز آخر بطاقة صفر، أثبت أن الانتروبي سوف يزداد بالقيمة 1.63.

الحل:

أ- نكون الجدول التالي بحيث أن عدد الجسيمات هو 2 والمجموع الكلي للطاقة هو $U = 2\varepsilon$ فنجد أن عدد الحالات العينية هو 2 وبحساب عدد الحالات المجهرية لكل حالة نجد أن عدد هما هو 1 و 2.

ويصبح المجموع الكلي للحالات المجهرية هو $\Omega_1 = \omega_1 + \omega_2 = 1 + 2 = 3$

ب- الانتروبي للنظام يحسب كالاتي:

$$S_1 = k_B \ln \Omega_1 = (1.38 \times 10^{-23} JK^{-1}) \ln 3 = 1.5 \times 10^{-23} JK^{-1}$$

ت- وعند وضع جسيم مميز آخر، $\odot$ ، بالمستوى ذو الطاقة صفر، كما بالجدول التالي، نجد أن المجموع

الكلي للحالات المجهرية هو $\Omega_2 = \omega_1 + \omega_2 = 3 + 3 = 6$

والانتروبي لهذه الحالة:

$$S_2 = k_B \ln \Omega_2 = (1.38 \times 10^{-23} JK^{-1}) \ln 6 = 2.5 \times 10^{-23} JK^{-1}$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\ln 6}{\ln 3} = 1.63$$

ومن هنا نجد النسبة:

الحالات العينية		
ε_i	1	2
2		$\oplus$
1	$\oplus \otimes$	
0		$\otimes$
الحالات المجهرية ω_i	$\frac{2!}{2!0!0!} = 1$	$\frac{2!}{1!0!1!} = 2$

الحالات العينية		
ε_i	1	2
2		$\oplus$
1	$\oplus \otimes$	
0	$\odot$	$\otimes \odot$
الحالات المجهرية ω_i	$\frac{3!}{2!1!0!} = 3$	$\frac{3!}{2!0!1!} = 3$

Kingdom of Saudi Arabia
Ministry of Education
Qassim University
College of Science
Department of Physics



المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم
جامعة القصيم
كلية العلوم
قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل الثالث: الإحصاء التقليدي لماكسويل – بولتزمان

Classical Statistics of Maxwell-Boltzmann

١. فرضيات الإحصاء التقليدي لماكسويل- بولتزمان

سوف نفترض نظاماً يحتوي على عدد كبير من الجسيمات:

١- المتطابقة (Identical)

تعني أن الجسيمات متطابقة في التركيب والمكونات (كتلة، شحنة، ...)

٢ - المميزة (Distinguishable)

الجسيمات المميزة تعني أننا نستطيع أن نميز (أو نعرف الفرق) بين جسيم وآخر بالرغم من تطابقهما. مثال على ذلك نموذج العملة المعدنية حيث ميزنا العملات بالتاريخ أو اللون.

٣ - لا ينطبق عليها مبدأ باولي للاستبعاد (Pauli exclusion principle).

سنفترض هنا أن النظام التقليدي (كما بالشكل المقابل):

⋮
⋮
⋮

1- يتكون من مستويات للطاقة $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots)$ حيث $(\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3, \dots)$

ϵ_3 ————— n_3

2- وهذه المستويات تتشبع بعدد من الجسيمات $(n_1, n_2, n_3, \dots)$

ϵ_2 ————— n_2

مع التقيد بالشرطين التاليين:

ϵ_1 ————— n_1

أ. العدد الكلي N للجسيمات بالنظام هو عدد ثابت، ويمكن كتابته رياضياً كالتالي:

$$N = \sum_i n_i , \quad (1)$$

ب. الطاقة الداخلية الكلية U للجسيمات بالنظام كمية ثابتة، و تُعرف رياضياً كالتالي:

$$U = \sum_i n_i \epsilon_i \quad (2)$$

ونعلم من نظرية الاحتمالات أن عدد الطرق اللازمة لتوزيع عدد N من الجسيمات المميزة على عدد j من المستويات بحيث يوضع n_1 بالمستوى الأول و n_2 بالمستوى الثاني وهكذا هو:

$$\tilde{\omega} = \omega \{n_i\} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^j n_i!} \quad (3)$$

عند وصول نظام يتكون من عدد لانهائي من الجسيمات والمستويات إلى حالة الاتزان، أي أعلى توزيع محتمل يحتوي على فئة من الأعداد $\tilde{n}_i$ يصل عنده قيمة الاحتمال الديناميكي الحراري $\tilde{\omega}$ إلى قيمة عظمى. بالتالي فإن أي تغيير، ولو طفيف، في فئة الأعداد $\{n_i\}$ لن يؤثر بقيمة $\tilde{\omega}$ وهذا يعني أن العلاقة $\delta\tilde{\omega} = 0$ تتحقق تحت التغيير $\tilde{n}_i \rightarrow \tilde{n}_i + \delta n_i$ مع التقيد بالشرطين التاليين:

$$\delta N = \sum_i \delta n_i = 0 \quad (4)$$

و

$$\delta U = \sum_i \varepsilon_i \delta n_i = 0 \quad (5)$$

وبالإمكان استخدام الشرط المكافئ:

$$\delta \ln \tilde{\omega} = 0 \quad (6)$$

مثال: من المعادلة (3)، واستخدام تقريب استيرلنج $\ln z! = z \ln z - z$ اثبت ان :

$$\ln(\tilde{\omega}) = N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i \quad (7)$$

ومنها اثبت أن:

$$\delta \ln(\tilde{\omega}) = - \sum_i \ln n_i \delta n_i \quad (8)$$

الحل

باستخدام لوغاريتم المعادلة (3) نجد أن:

$$\begin{aligned} \ln(\tilde{\omega}) &= \ln\left(\frac{N!}{\prod_{i=1}^n n_i!}\right) = \ln(N!) - \ln\left(\prod_{i=1}^n n_i!\right) = \ln(N!) - \ln[n_1! \times n_2! \times \dots \times n_n!] \\ &= \ln(N!) - [\ln(n_1!) + \ln(n_2!) + \dots] \\ &= \ln(N!) - \sum \ln(n_i!) \end{aligned}$$

وباستخدام تقريب استيرلنج للمعادلة السابقة نجد أن:

$$\begin{aligned}\ln(\tilde{\omega}) &= N \ln N - N - \sum_i (n_i \ln n_i - n_i) = N \ln N - N - \sum_i n_i \ln n_i - \underbrace{\sum_i n_i}_N \\ &= N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i\end{aligned}\quad (7) \quad \text{وهو المطلوب إثباته أولاً}$$

وبتفاضل المعادلة (7) بالنسبة إلى n_i نجد:

$$\begin{aligned}\delta \ln(\tilde{\omega}) &= \delta(N \ln N) - \sum_i \ln n_i \delta n_i - \sum_i n_i \underbrace{\delta(\ln n_i)}_{\frac{1}{n_i} \delta n_i} = 0 - \sum_i \ln n_i \delta n_i - \underbrace{\sum_i \delta n_i}_{=0} \\ &= -\sum_i \ln n_i \delta n_i\end{aligned}\quad (8) \quad \text{وهو المطلوب إثباته ثانيةً}$$

والسؤال هنا: كيف نحسب التوزيع الإحصائي مع وجود القيد (1) و (2) واحتمالية الديناميكا الحرارية (3)؟ دعونا نجيب على هذا السؤال في الحالتين التاليتين.

المستويات المنفردة (وحيدة الانتماء) Non - Degenerate levels

نستخدم طريقة لاجرانج وذلك بضرب المعادلة (1) بالمعامل α والمعادلة (2) بالمعامل β - وجمعهما على المعادلة (8) نجد أن:

$$\delta \left[\ln(\tilde{\omega}) + \alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i \varepsilon_i n_i \right] = 0 \quad (11)$$

حيث α و β تسمى معاملات "لاجرانج"، ولهم علاقة بالخواص الفيزيائية للنظام. وبتفاضل المعادلة (11) نصل إلى الصيغة التالية:

$$\sum_i \left[-\ln n_i + \alpha - \beta \varepsilon_i \right] \delta n_i = 0$$

وهي تعبر عن عدد لانهائي من المعادلات. فبمساواة معاملات δn_i بالصفر نصل إلى أشهر علاقة للتوزيع الإحصائي وهي:

$$\boxed{n_i = e^{\alpha - \beta \varepsilon_i}} \quad (12)$$

وتسمى المعادلة (12) بالتوزيع الإحصائي التقليدي لماكسويل- بولتزمان.

الدالة $e^{-\beta \alpha}$ تسمى معامل بولتزمان، وهي دالة تعتمد على درجة الحرارة والحجم ولها أهميتها التطبيقية الخاصة بمختلف الفروع العلمية.

إذا افترضنا أن كل منسوب للطاقة (i) متعدد الانتماء، بحيث أنه يتكون من عدد g_i من مستويات الطاقة، فإن كل جسيم n_i يمكنه أن يستقر في أي مستوى بعدد من الطرق مقدارها $g_i^{n_i}$ ولجميع مناسيب الطاقة نجد أن عدد الطرق تأخذ الصورة النهائية $\prod_{i=1}^J g_i^{n_i}$ ومنها نجد أن عدد المستويات المجهرية للجسيمات المميزة تعرف بالمعادلة:

$$\tilde{\omega}\{n_i\} = N! \prod_{i=1}^J \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (13)$$

التوزيع الإحصائي التقليدي لماكسويل-بولتزمان يأخذ الشكل:

$$\boxed{n_i = g_i e^{\alpha - \beta \varepsilon_i}} \quad (15)$$

وتطبيقات إحصاء ماكسويل-بولتزمان، خلال معادلتى (12) و (15)، متعددة ومتنوعة. ومن أهم التطبيقات الخاصة لهذا لتوزيع هي دراسة عملية تضخيم الضوء من خلال دراسة تفاعل المواد مع مجال خارجي للطاقة، مثل الإشعاعات الكهرومغناطيسية، والتي يظهر تأثيرها من خلال الفوتونات على الكثرونات المواد.

علاقات هامة

1. حساب المعامل e^α

يحسب المعامل e^α باستخدام الشرط الأساسي:

$$N = \sum_i n_i = \sum_i g_i e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} = e^{-\alpha} \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$$

ومنه نجد أن:

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{\sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}} = \frac{N}{Z_{\text{sp}}}, \quad Z_{\text{sp}} = \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$$

حيث عرفنا الدالة الجديدة Z_{sp} لجسيم مفرد. الدالة Z_{sp} تسمى بالإنجليزية Partition function بمعنى دالة تجزئ. والدالة مشتقة أصلاً من المصطلح الألماني Zustandsomme وتعني تجميع الحالات (المستويات). لذلك فسوف نستخدم الترجمة الألمانية ونسميها "دالة تجميع المستويات"، أو باختصار دالة تجميع.

باستخدام دالة التجميع يأخذ توزيع ماكسويل- بولتزمان، المعادلة (15) الشكل:

$$n_i = N \frac{e^{-\beta \varepsilon_i}}{Z_{sp}}; \quad (16)$$

أو الصيغة العامة

$$n_i = Ng_i \frac{e^{-\beta \varepsilon_i}}{Z_{sp}} \quad (17)$$

2. تفاضلات مهمة

1-

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_{\text{sp}}}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} = - \sum_i \varepsilon_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\frac{\partial Z_{\text{sp}}}{\partial \beta} = - \sum_i \varepsilon_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}}\end{aligned}\quad (18)$$

2-

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Z_{\text{sp}}}{\partial V}\right)_{T,N} &= \left(\frac{\partial}{\partial V} \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i}\right)_{T,N} = - \sum_i \beta g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial V}\right)_{T,N} \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\left(\frac{\partial Z_{\text{sp}}}{\partial V}\right)_{T,N} = - \beta \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial V}\right)_{T,N}}\end{aligned}\quad (19)$$

3. حساب الطاقة المتوسطة

تحسب الطاقة المتوسطة من العلاقة:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{1}{N} \sum_i n_i \varepsilon_i = \frac{1}{Z_{\text{sp}}} \sum_i \varepsilon_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \\ &= -\frac{1}{Z_{\text{sp}}} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} = -\frac{1}{Z_{\text{sp}}} \frac{\partial Z_{\text{sp}}}{\partial \beta} \\ \Rightarrow \quad \boxed{\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} [\ln(Z_{\text{sp}})]} \quad (20)\end{aligned}$$

وتصبح الطاقة الداخلية الكلية:

$$\Rightarrow \quad \boxed{U = -N \frac{\partial}{\partial \beta} [\ln(Z_{\text{sp}})]} \quad (21)$$

4. حساب الضغط المتوسط

يحسب الضغط المتوسط في الديناميكا الحرارية بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= -\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial V}\right)_{S,N} \\ &= \frac{1}{Z_{\text{sp}}} \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \left(-\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial V}\right)_{T,N} \\ &= \frac{1}{\beta Z_{\text{sp}}} \left(\frac{\partial Z_{\text{sp}}}{\partial V}\right) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln(Z_{\text{sp}})}{\partial V}\right)_{T,N} \\ \Rightarrow \quad &\boxed{\bar{P} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \ln(Z_{\text{sp}})}{\partial V}\right)_{T,N}} \quad (22)\end{aligned}$$

5. حساب الإنتروبي S

من المعادلة (16) واستخدام تقريب استيرلنج نجد أن:

$$\ln(n_i) = \ln N - \ln Z_{\text{sp}} - \beta \varepsilon_i$$

و من المعادلة (7) يحسب الإنتروبي كالتالي:

$$S = k_B \ln(\tilde{\omega}) = k_B \left(N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i \right)$$

ومنها نحصل على:

$$\begin{aligned} S &= k_B \left(N \ln N - \sum_i n_i \underbrace{\ln n_i}_{\ln N - \ln Z_{\text{sp}} - \beta \varepsilon_i} \right) \\ &= k_B \left(N \ln N - \ln N \underbrace{\sum_i n_i}_N + \ln Z_{\text{sp}} \underbrace{\sum_i n_i}_N + \beta \underbrace{\sum_i n_i \varepsilon_i}_U \right) \\ &\Rightarrow \boxed{S = k_B N \ln Z_{\text{sp}} + k_B \beta U} \end{aligned} \quad (23)$$

حيث استخدمنا العلاقات

$$\sum_i n_i = N, \quad \text{and} \quad \sum_i n_i \varepsilon_i = U$$

6. حساب المعامل β

باستخدام قانون الديناميكا الحرارية $TdS = dU + PdV$ نجد أن:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V \quad (a)$$

ومن تفاضل الإنتروبي بالمعادلة (23) نحصل على:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V &= k_B N \underbrace{\frac{d \ln Z_{\text{sp}}}{d \beta}}_{-\frac{U}{N} \text{ from (21)}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial U} \right)_V + k_B \beta + k_B U \left(\frac{\partial \beta}{\partial U} \right)_V \\ &= k_B \beta \end{aligned} \quad (b)$$

بمساواة المعادلتين (a) و (b) نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= k_B \beta \\ \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}} \end{aligned} \quad (23)$$

7. حساب طاقة هلمهولتز الحرة

تحسب طاقة هلمهولتز الحرة من العلاقة

$$\begin{aligned} F &= U - TS \\ &= U - T (k_B N \ln Z_{\text{sp}} + k_B \beta U) \\ &= U - N k_B T \ln Z_{\text{sp}} - \underbrace{\beta k_B T}_{1/\beta} U \\ &\Rightarrow \boxed{F = -N k_B T \ln Z_{\text{sp}}} \end{aligned} \quad (24)$$

مثال:

نظام يتكون من ثلاثة مستويات للطاقة كالتالي $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 100k_B$, $\epsilon_3 = 200k_B$ ولهم الانتماءات $g_1=1$, $g_2=3$, $g_3=5$ احسب الإسكان النسبي بين المستويات عند درجة حرارة $T=100\text{ K}$.

الحل:

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j e^{\alpha - \beta \epsilon_j}}{g_i e^{\alpha - \beta \epsilon_i}} = \frac{g_j e^{-\beta \epsilon_j}}{g_i e^{-\beta \epsilon_i}}$$

من المعادلة (15) نجد أن الإسكان النسبي بين المستويات يُعطى بالعلاقة:

ومنها نجد

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{3e^{-100k_B/100k_B}}{1e^{-0}} = 3e^{-1}$$

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{5e^{-200k_B/100k_B}}{1e^{-0}} = 5e^{-2}$$

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{5e^{-200k_B/100k_B}}{3e^{-100k_B/100k_B}} \approx 1.7e^{-1}$$

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل الرابع: دالة تجميع المستويات وتطبيقاتها

المحتويات

الصفحة	العنوان	الفصل
3	دالة التجميع للمستويات المنفردة	I
9	دالة التجميع للمستويات المتصلة	II
12	تطبيقات دالة التجميع للغاز المثالي i حساب الضغط ii حساب الطاقة الداخلية iii حساب الحرارة النوعية iv حساب الإنتروبي	III
15	أمثلة محلولة	IV

سوف نستعرض هنا أهم دالة بالفيزياء الإحصائية، ألا وهي دالة تجميع المستويات " Z_{sp} "، حيث تعتبر حجر الأساس في حسابات خواص ودوال الديناميكا الحرارية. الدالة Z_{sp} لجسيم احادي "Single particle" تسمى بالإنجليزية "Partition function" بمعنى "دالة تجزئ". والدالة مشتقة أصلا من الكلمة الألمانية "Zustandsumme" وتعني تجميع الحالات (المستويات). لذلك فسوف نستخدم الترجمة الألمانية ونسميها "دالة تجميع المستويات"، أو باختصار "دالة التجميع".

تُمثل الدالة تجميعاً لمعامل بولتزمان ($e^{-\beta\epsilon_i}$) ولها الخواص التالية:

1. التجميع لجميع المستويات المجهرية المميزة للنظام ككل $Z_{sp} = \sum_i e^{-\beta\epsilon_i}$ (1) للمستويات المنفردة
2. التجميع مع أخذ الانتماء (g_i) بعين الاعتبار $Z_{sp} = \sum_i g_i e^{-\beta\epsilon_i}$ (2) مع وجود الانتماء
3. تعتمد على الخواص المجهرية الإحصائية للنظام.
4. تعتمد على درجة الحرارة المطلقة للنظام من خلال المعامل β .
5. تتناسب مع حجم الغاز وذلك من خلال كثافة المستويات $g(\epsilon)$ أو g_i
6. قيمتها العددية تتغير من القيمة 1 إلى قيم فلكية.

دعونا نطبق العلاقة (1) لبعض الأمثلة المختلفة حتى نستخلص بعض من الخواص الهامة لهذه الدالة.

مثال: اعتبر نظام بسيط يتكون من جسيمين .إذا تواجد النظام في مستويين فقط للطاقة وهما $\epsilon_1 = 0$ و $\epsilon_2 = \epsilon$ مع الشرط

$$g_1 = g_2 = 1$$

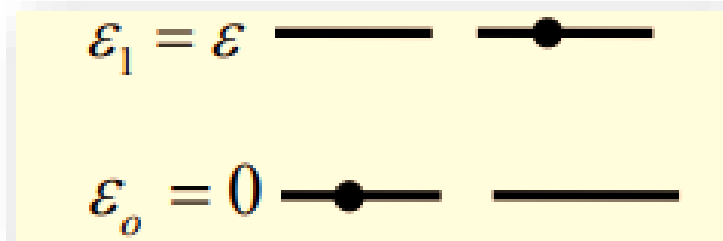
1. احسب Z_{sp} .

2. احسب Z_2 في حالة أن الجسيمن مميزان (جسيمات بولتزمان).

3. احسب Z'_2 في حالة أن الجسيمن غير مميزان.

الحل

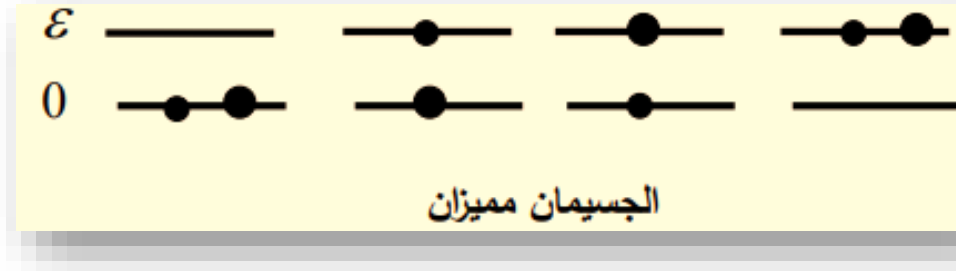
1- لجسيم واحد نجد أن عدد الحالات المجهرية هم اثنتان كما بالشكل التالي:



لذلك نجد أن دالة التجميع هي:

$$Z_{sp} = \sum_{i=1}^2 e^{-\beta \epsilon_i} = e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} = e^0 + e^{-\beta \epsilon} = 1 + e^{-\beta \epsilon}$$

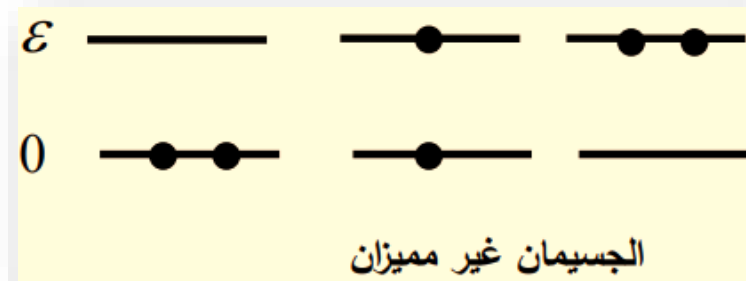
٢ - في حالة أن الجسيمان مميزان نجد أن عدد الحالات المجهرية أربع مستويات كما بالشكل التالي:



وتحسب دالة التجميع بالمعادلة

$$\begin{aligned}
 Z_2 &= \sum_{i=1}^4 e^{-\beta \epsilon_i} = e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} + e^{-\beta \epsilon_3} + e^{-\beta \epsilon_4} : \\
 &= e^{-\beta(0+0)} + e^{-\beta(0+\epsilon)} + e^{-\beta(\epsilon+0)} + e^{-\beta(\epsilon+\epsilon)} \\
 &= 1 + 2e^{-\beta \epsilon} + e^{-2\beta \epsilon} = (1 + e^{-\beta \epsilon})^2 = (Z_{sp})^2
 \end{aligned}$$

٣ - وفي حالة أن الجسيمان غير مميزان نجد أنه يوجد ثلاثة مستويات مجهرية فقط كما بالشكل التالي:



$$\begin{aligned}
Z'_2 &= \sum_{i=1}^3 e^{-\beta \epsilon_i} = e^{-\beta \epsilon_1} + e^{-\beta \epsilon_2} + e^{-\beta \epsilon_3} && \text{وتحسب دالة التجميع بالمعادلة} \\
&= e^{-\beta(0+0)} + e^{-\beta(0+\epsilon)} + e^{\beta(-\epsilon-\epsilon)} \\
&= 1 + e^{-\beta \epsilon} + e^{-2\beta \epsilon} \neq (Z_{sp})^2
\end{aligned}$$

من هذا المثال يتضح التالي: أنه في الحالة العامة للجسيمات التقليدية المميزة والمتطابقة فإن دالة التجميع لكل جسيم منفرد متساوية. بالتالي فإن العلاقة بين دالة التجميع الكلية للجسيمات Z_N ودالة التجميع للجسيم المنفرد Z_{sp} تعطى بالعلاقة:

$$Z_N = (Z_{sp})^N \quad (3)$$

وهذا لا ينطبق على الجسيمات الغير المميزة. ونلاحظ أيضاً أن القيم العددية لدالة التجميع في حالة الجسيمات المميزة أكثر من القيم العددية لدالة التجميع في حالة الجسيمات الغير مميزة. وعامة فإنه للجسيمات الغير المميزة نجد أن دالة التجميع تحسب من المعادلة التالية:

$$Z_N = \frac{Z_{sp}^N}{N!} \quad (4)$$

ويصبح توزيع ماكسويل - بولتزمان بالشكل

$$n_i = N g_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z_{sp}} \quad (5)$$

والآن دعونا نعرف دالة التوزيع لماكسويل - بولتزمان بالصورة

$$f(\epsilon_i) = \frac{n_i}{g_i} = N \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z_{sp}} \quad (6)$$

وهي تعين متوسط عدد الجسيمات لكل مستوى كمي. وبالإمكان أيضاً أن نعرف النسبة:

$$P_i = \frac{n_i}{N} = g_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z_{sp}}, \quad \text{with } N \rightarrow \infty \quad (7)$$

بأنها الاحتمالية العشوائية لوجود جسيم بالمستوى i مع وجود الشرطين:

$$\sum_i P_i = 1 \quad \text{and} \quad \sum_i \epsilon_i P_i = \bar{E}$$

والقيمة المتوسطة لأي كمية فيزيائية تأخذ الصيغة التجميعية:

$$\bar{f} = \frac{1}{N} \sum_i n_i f(\epsilon_i) = \frac{1}{Z_{sp}} \sum_i g_i f(\epsilon_i) e^{-\beta \epsilon_i} \quad (8)$$

مثال: نظام يتكون من ثلاث مستويات للطاقة كالتالى $\epsilon_1=0$, $\epsilon_2=100 k_B$, $\epsilon_3=200 k_B$ ولهما الانتماءات $g_1=1$, $g_2=3$, $g_3=5$. احسب:

1- دالة التجميع Z_{sp}

2- الاسكان النسبى لكل مستوى

3- متوسط الطاقة عند درجة الحرارة $T=100 K$

الحل: دالة التجميع تحسب من المعادلة

$$\begin{aligned} Z_{sp} &= \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} \\ &= 1e^{-0} + 3e^{-100k_B/100k_B} + 5e^{-200k_B/100k_B} \\ &= 1 + 3e^{-1} + 5e^{-2} \approx 2.78 \end{aligned}$$

والإسكان النسبى لكل مستوى يعطى بالعلاقة

$$P_i = \frac{n_i}{N} = g_i \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{Z}$$

بالتالى احتمالية وجود الجسيم بكل مستوى تعطى بالقيم:

$$P_0 = \frac{1}{Z} \approx 0.360 , P_1 = \frac{3e^{-1}}{Z} \approx 0.397 , P_2 = \frac{5e^{-2}}{Z} \approx 0.243$$

والطاقة المتوسطة

$$\bar{E} = \sum_i \epsilon_i P_i = (0 \times P_0 + 100 \times P_1 + 200 \times P_2)k_B \approx 88.3k_B$$

ii. دالة التجميع للمستويات المتصلة

عندما تصبح المستويات متقاربة من بعضها البعض (متصلة)، نستطيع أن نستغني عن دالة التجميع

$$Z_{sp} = \sum_i g_i e^{-\beta \epsilon_i} \quad \text{بالتكامل التالي} \quad (1) \quad Z_{sp} = \int g(\epsilon) e^{-\beta \epsilon} d\epsilon$$

حيث $g(\epsilon)$ هي كثافة المستويات وتصبح الصورة العامة لدالة التجميع بالشكل:

$$Z_{sp} = \frac{1}{h^3} \int g(\epsilon) e^{-\beta \epsilon} d\epsilon dr \quad (2)$$

وللمستويات المتصلة تأخذ دالة التوزيع لماكسويل - بولتزمان الصورة

$$f(\epsilon) = \frac{N(\epsilon)}{g(\epsilon)} = N \frac{e^{-\beta \epsilon_i}}{\int g(\epsilon) e^{-\beta \epsilon_i} d\epsilon} \quad (3)$$

مثال: استخدم المعادلة (2) لحساب دالة التجميع للغازات أحادية الذرة (الغاز المثالي).

الحل: نحن نعرف أن الغاز المثالي يمتلك طاقة حركية انتقالية فقط نظراً لإهمالنا طاقة التفاعل بين الذرات. حيث أن الغاز يشغل حيزاً كبيراً وتتقارب فيه مستويات الطاقة بحيث يمكن اعتبار أن دالة كثافة المستويات g_i دالة متصلة. ولذلك يمكننا أن نعوض عنها بالكمية $g(\epsilon)d\epsilon$ والتي تعبر عن عدد الجزيئات التي تنحصر طاقاتها بين القيمتين ϵ و $\epsilon + d\epsilon$

دعونا نبدأ بحساب دالة التجميع لجسيم منفرد Z_{sp} المعادلة (2) حيث كثافة المستويات تعرف بالمعادلة:

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$$

$$Z_{sp} = \int_0^\infty g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} e^{-\epsilon/k_B T} d\epsilon$$
 وبالتالي فإن

$$= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y} dy = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y} dy = \Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2 \text{ حيث}$$

$$= V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} = V \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{3/2}$$

ولعدد N من جسيمات ماكسويل المميزة نجد أن دالة التجميع الكلية هي:

$$Z_N = (Z_{sp})^N = V^N \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{3N/2} \quad (4)$$

و غالباً نستخدم اللوغاريتم لدالة التجميع وتأخذ الصور:

$$\ln(Z_{sp})^N = N \ln V + N \ln \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4a)$$

$$= N \ln V + \frac{3}{2} N \ln \left(\frac{2\pi m k_B}{h^2} \right) + \frac{3}{2} N \ln(T) \quad (4b)$$

سوف نتضح أهمية هذه المعادلات عند استخدامها في حساب الكميات الفيزيائية للغاز المثالي.

iii. تطبيقات دالة التجميع للغاز المثالي

لقد وجد سابقاً أن خواص الغاز المثالي تعرف بالكميات الفيزيائية مثل الضغط والطاقة الداخلية وحرارة النوعية . وقد تم حساب هذه الكميات من خلال الديناميكا الحرارية والنظرية الحركية . وهنا سوف نستخدم دالة التجميع، المعادلة (4)، لحساب الكميات السابقة.

1. حساب الضغط

يحسب ضغط الغاز المثالي كالتالي: بدءاً من المعادلة (4)، نجد أن الطاقة الحرة لهلمهولتز تعطى:

$$F = -k_B T \ln(Z_{sp})^N = -Nk_B T \ln(Z_{sp})$$

ويحسب الضغط من العلاقة

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,\beta} = Nk_B T \left(\frac{\partial \ln Z_{sp}}{\partial V}\right)_{T,N} = Nk_B T \frac{\partial \{(4.a)\}}{\partial V}$$

$$p = Nk_B T \frac{1}{V} \Rightarrow \boxed{pV = Nk_B T} \quad (5)$$

وهي المعادلة العامة للغاز المثالي.

ii. حساب الطاقة الداخلية

تُحسب الطاقة الداخلية للغاز المثالي من العلاقة $\{(13.b)\}$ $U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_N = -\frac{\partial}{\partial \beta} \{(13.b)\}$

$$U = -\left(\frac{3}{2}\beta\left(-\frac{1}{\beta^2}\right)\right) = \frac{3}{2}\frac{N}{\beta} = \frac{3}{2}Nk_B T \Rightarrow U = \frac{3}{2}Nk_B T \quad (6)$$

ومنها نجد أن متوسط الطاقة الحركية لجسيم هي:

$$\bar{\epsilon} = \frac{U}{N} = \frac{3}{2}k_B T \quad (7)$$

والتي تتطابق مع قانون توزيع الطاقة المتساوي على درجات الحرية.

iii. حساب الحرارة النوعية

تُحسب الحرارة النوعية للغاز المثالي من العلاقة:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{3}{2}Nk_B \quad (8)$$

ومنها نجد أنها كمية ثابتة ولا تعتمد على درجة الحرارة.

v. حساب الإنتروبي

يحسب الإنتروبي كالتالي :

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = Nk_B \left[\ln V + \frac{3}{2} \ln T + S_0 \right] \quad (9)$$

$$S_0 = \frac{3}{2} \left[\ln \left(\frac{2\pi mk}{h^2} \right) + 1 \right] \quad \text{حيث}$$

تشبه المعادلات المشتقة سابقاً بقوانين الديناميكا الحرارية، والتي لها الشكل (10) $S = c_v \ln T + R \ln v + s_0$ المعادلة (9) لإنتروبي الغاز المثالي تسمى بمعادلة "ساكور-تيتروود" وبالرغم من بساطتها ولكنها غير صحيحة للأسباب التالية:

1. عند النهاية $T \rightarrow 0$ نجد أن $\lim_{T \rightarrow 0} S \neq 0$ وهذا يتناقض مع القانون الثالث للديناميكا الحرارية والذي يفترض أن $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$ لأي نظام. هذا التناقض ناتج من أننا حسبنا دالة التجميع بواسطة صيغة التكامل وليس التجميع وباستخدامنا لهذا التقريب فإننا نهمل (نستبعد) جميع المستويات ذات الطاقة $\epsilon = 0$ عندما $T \rightarrow 0$ وهذه المستويات هي السائدة.
2. سوف تظهر لنا معضلة جبس الناتجة من عدم تمييز الجسيمات المجهرية، وسوف نتحدث عنها بالتفصيل بمكان آخر.

مثال: نظام مثالي يطبق عليه إحصاء ماكسويل التلقائي ويتكون من جسيمين متطابقين ومميزين في وعاء ذو حجم V . كل جسيم بإمكانه التواجد في مستويات لها الطاقة $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=\varepsilon$, $\varepsilon_3=2\varepsilon$ ولهم الانتماءات $g_1=2$, $g_2=1$, $g_3=1$. احسب:

أ- العدد الكلي للحالات المجهرية

ب- دالة التجميع،

ت- الطاقة المتوسطة.

الحل: سوف نفترض هنا أن الجسيمان المميزان هما a , b وبالتالي نستطيع ترتيبهم كالتالي، مع ملاحظة أن المستوى الأول له درجة الانتماء $g_1=2$

Energy	Microstates			
	1	2	3	4
2ε	0	0	0	0
ε	0	0	0	0
0	ab 0	0 ab	a b	b a
$E_0 =$	0	0	0	0

Energy	Microstates			
	5	6	7	8
2ε	0	0	0	0
ε	b	a	b	a
0	a 0	b 0	0 a	0 b
$E_1 =$	ε	ε	ε	ε

Energy	Microstates				
	9	10	11	12	13
2ε	b	a	b	a	0
ε	0	0	0	0	ab
0	a 0	b 0	0 a	0 b	0 0
$E_2 =$	2ε	2ε	2ε	2ε	2ε

Energy	Microstates		
	14	15	16
2ε	b	a	ab
ε	a	b	0
0	0 0	0 0	0 0
$E_3 =$	3ε	3ε	$E_4 = 4\varepsilon$

أ. العدد الكلي للحالات المجهرية في إحصاء ماكسويل يُحسب من العلاقة:

عدد الجسيمات
 (عدد مستويات الطاقة) = العدد الكلي للحالات المجهرية

$$\therefore g^N = (2 + 1 + 1)^2 = 4^2 = 16 \text{ microstates}$$

ب. دالة التجميع تُحسب كالتالي:

$$Z_{MB} = \sum_{i=0}^{16} e^{-\beta E_i}$$

باستخدام التجميع حسب مستويات الطاقة الكلية:

$$\begin{aligned} Z_{MB} &= 4e^{-\beta E_0} + 4e^{-\beta E_1} + 5e^{-\beta E_2} + 2e^{-\beta E_3} + e^{-\beta E_4} \\ &= 4 + 4e^{-\beta \epsilon} + 5e^{-2\beta \epsilon} + 2e^{-3\beta \epsilon} + e^{-4\beta \epsilon} \end{aligned}$$

ت. والطاقة المتوسطة هي:

$$U_{MB} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$$

$$U_{MB} = \frac{4\epsilon e^{-\beta \epsilon} + 10\epsilon e^{-2\beta \epsilon} + 6\epsilon e^{-3\beta \epsilon} + 4\epsilon e^{-4\beta \epsilon}}{4 + 4e^{-\beta \epsilon} + 5e^{-2\beta \epsilon} + 2e^{-3\beta \epsilon} + e^{-4\beta \epsilon}} \rightarrow \frac{3}{2}\epsilon \quad (\text{as } T \rightarrow \infty)$$

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل الخامس: دالة توزيع السرعات لماكسويل - بولتزمان

أهداف الوحدة التعليمية

تمكين الطالب من:

- فهم الأساس الفيزيائي للسلوك الإحصائي لجزيئات الغاز في الأنظمة الحرارية.
- اشتقاق دالة توزيع ماكسويل – بولتزمان للسرعات بطريقة رياضية مبسطة.
- تحليل شكل منحنى التوزيع وعلاقته بدرجة الحرارة.
- تمييز السرعات الثلاث الأساسية الناتجة عن التوزيع :
- السرعة الأكثر احتمالاً (Most Probable Speed)
- السرعة المتوسطة (Mean Speed)
- السرعة الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعات (RMS Speed)
- تفسير أثر درجة الحرارة على انتشار وتغير التوزيع.

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

- كما درسنا في الأبواب السابقة فإن دالة توزيع ماكسويل – بولتزمان لمستويات الطاقة المنفصلة:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{n_i}{g_i} = N \left(\frac{e^{-\beta \varepsilon_i}}{Z_{sp}} \right), \quad Z_{sp} = \sum_i g_i e^{-\beta \varepsilon_i} \quad (1)$$

- حيث Z_{sp} هي دالة التجميع للجسيم المفرد و g_i كثافة مستويات الطاقة المنفصلة.
- في حالة الغاز المثالي وعندما تصبح المستويات قريبة جدا من بعضها (متصلة) فإن دالة التجميع تتحول من عملية التجميع لمستويات الطاقة إلى تكامل بالنسبة لطاقة المستويات
- لذلك فإنه في حالة التوزيع المتصل لمستويات الطاقة فإن دالة توزيع ماكسويل – بولتزمان تكون:

$$f(\varepsilon) = \frac{n(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = N \left(\frac{e^{-\beta \varepsilon}}{Z_{sp}} \right), \quad Z_{sp} = \int g(\varepsilon) e^{-\beta \varepsilon} d\varepsilon \quad (2)$$

- حيث Z_{sp} هي دالة التجميع للجسيم المفرد و $g(\varepsilon)$ كثافة مستويات الطاقة المتصلة.
- للغاز المثالي تعطي $g(\varepsilon)$ من ميكانيكا الكم بالعلاقة:

$$g(\varepsilon) = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \quad (3)$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

• عدد الجسيمات $dn(\epsilon)$ التي لها الطاقة في المدى $d\epsilon$ أي بين القيمتين ϵ و $\epsilon + d\epsilon$ يعطى من:

$$dn(\epsilon) = n(\epsilon) d\epsilon$$

$$dn(\epsilon) = f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon$$

• بالتعويض عن $n(\epsilon) = f(\epsilon) g(\epsilon)$ من المعادلة (2):

• بالتعويض عن $f(\epsilon) = N \left(\frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z_{sp}} \right)$ من المعادلة (2) و $g(\epsilon) = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}$ من المعادلة (3):

$$dn(\epsilon) = N \left(\frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z_{sp}} \right) 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$

• دالة التجميع للجسيم المفرد لمستويات الطاقة المتصلة $Z_{sp} = V \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$ تم استنتاجها سابقا ، لذلك:

$$dn(\epsilon) = N \frac{e^{-\beta\epsilon}}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$

$$dn(\epsilon) = \frac{2\pi N}{(\pi k_B T)^{3/2}} \sqrt{\epsilon} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \quad (4)$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

• وبغرض التحويل من توزيع الجسيمات كدالة في الطاقة $dn(\varepsilon)$ إلى توزيع الجسيمات كدالة في السرعة $dn(v)$:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow d\varepsilon = m v dv \rightarrow \sqrt{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{1/2} v$$

$$\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{1/2} v m v dv \rightarrow \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{3/2} v^2 dv$$

• بالتعويض في معادلة (4):

$$dn(v) = \frac{2\pi N}{(\pi k_B T)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2}} m^{3/2} v^2 e^{-\beta m v^2/2} dv$$

• بضرب الطرف الأيمن في $\frac{2}{2}$

$$dn(v) = \frac{4\pi N}{(2\pi k_B T)^{3/2}} m^{3/2} v^2 e^{-\beta m v^2/2} dv$$

$$dn(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\beta m v^2/2} dv \quad (5)$$

• تعرف $dn(v)$ بأنها عدد الجسيمات التي لها السرعات المحددة بين v و $v + dv$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

- تعرف المعادلة (5) كذلك بأنها دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان. تساعد المعادلة في فهم توزيع الجسيمات بتغير السرعات أو درجات الحرارة كما هو موضح الشكل.

أولاً: تغير السرعات:

1. تنعدم الدالة $dn(v)$ عند $v = 0$ أو $v = \infty$

أي أن: $dn(0) = 0, dn(\infty) = 0$

2. عند السرعات المنخفضة ، بمعنى أن $\frac{\beta m v^2}{2} \ll 1$

فإن الحد $e^{-\beta m v^2/2} \approx 1$

وتكون $dn(v)$ تتناسب مع مربع السرعة $dn(v) \propto v^2$

تبدأ $dn(v)$ من الصفر وتزداد تربيعياً مع زيادة السرعة حتى تصل إلى قيمة عظمى تسمى السرعة الأكثر احتمالاً v_{mps}

3. عند السرعات المرتفعة ، بمعنى أن $\frac{\beta m v^2}{2} \gg 1$ نجد أن الحد $e^{-\beta m v^2/2}$ يكون هو السائد.

وتتناقص $dn(v)$ أسياً مع زيادة السرعة

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

ثانيا: تغير درجات الحرارة:

نلاحظ أنه بزيادة درجة الحرارة:

1. تزداد سرعة الجسيمات

2. تقل القيمة العظمى ل $dn(v)$

3. تزداد قيمة السرعة الأكثر احتمالا v_{mps}

4. يصبح المنحنى أكثر اتساعا وهذا بسبب أن المساحة الكلية تحت المنحنيات يدل على العدد الكلي للجسيمات بالنظام والذي يجب أن يظل ثابت عند أي درجة حرارة

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

حساب السرعة المتوسطة للجزيئات:

• يتم حساب السرعة المتوسطة للجزيئات من العلاقة:

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \, dn(v) \, dv$$

$$\bar{v} = \frac{4\pi N}{N} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v \, v^2 e^{-\beta m v^2/2} \, dv$$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-\beta m v^2/2} \, dv$$

• بوضع $a = \frac{\beta m}{2}$ حيث m كتلة الجزيء بالكيلوجرام

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} v^3 e^{-a v^2} \, dv$$

• ولكن $\int_0^{\infty} v^3 e^{-a v^2} \, dv = \frac{1}{2 a^2}$

$$\bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{1}{2 a^2} \rightarrow \bar{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{4}{2 \beta^2 m^2}$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

تابع حساب السرعة المتوسطة للجزيئات:

$$\bar{v} = 8\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{1}{\beta^2 m^2}$$

• بالتعويض عن $\beta = \frac{1}{k_B T}$

$$\bar{v} = 8\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{k_B^2 T^2}{m^2} \rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

• للغاز المثالي $R = k_B N_A$ ، حيث R الثابت العام للغازات و N_A عدد أفوجادرو

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 R T}{\pi N_A m}}$$

• بالتعويض عن $M = N_A m$ هي الوزن الجزيئي للجزيء بالكيلوجرام/مول

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 R T}{\pi M}} \rightarrow \bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sqrt{\frac{R T}{M}} \rightarrow \boxed{\bar{v} = 1.596 \sqrt{\frac{R T}{M}}}$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

حساب متوسط مربع سرعة للجزيئات:

• يتم حساب متوسط مربع سرعة للجزيئات من العلاقة:

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 dn(v) dv$$

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-a v^2} dv$$

• ولكن $\int_0^\infty v^4 e^{-a v^2} dv = \frac{3\sqrt{\pi}}{8 a^{5/2}}$

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8 a^{5/2}} \rightarrow \overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{3 \times 2^{5/2} \sqrt{\pi}}{8 \beta^{5/2} m^{5/2}}$$

$$\overline{v^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{3 \times 2^{5/2} \sqrt{\pi} k_B^{5/2} T^{5/2}}{8 m^{5/2}} \rightarrow \overline{v^2} = \frac{3k_B T}{m} \rightarrow \overline{v^2} = \frac{3R T}{M}$$

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} \rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{3R T}{M}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{R T}{M}}$$

$$v_{rms} = 1.732 \sqrt{\frac{R T}{M}}$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

حساب السرعة الأكثر احتمالاً للجزيئات :

- تعرف السرعة الأكثر احتمالاً v_{mps} بأنها السرعة المقابلة للقيمة العظمى للدالة $v^2 e^{-a v^2}$ والتي يكون عندها عدد الجزيئات أكبر ما يكون.
- تحسب v_{mps} كالتالي: عند النهاية العظمى للدالة فإن التفاضل الأول للدالة يساوي صفر.
- لذلك نحسب التفاضل الأول للدالة $v^2 e^{-a v^2}$

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-a v^2} \right) = v^2 \frac{d}{dv} \left(e^{-a v^2} \right) + e^{-a v^2} \frac{d}{dv} \left(v^2 \right)$$

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-a v^2} \right) = v^2 e^{-a v^2} (-2 a v) + e^{-a v^2} (2 v)$$

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-a v^2} \right) = -2 a v^3 e^{-a v^2} + 2 v e^{-a v^2}$$

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-a v^2} \right) = (-2 a v^3 + 2 v) e^{-a v^2}$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

تابع حساب السرعة الأكثر احتمالا للجزيئات :

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-a v^2} \right) \Big|_{v=v_{mps}} = 0$$

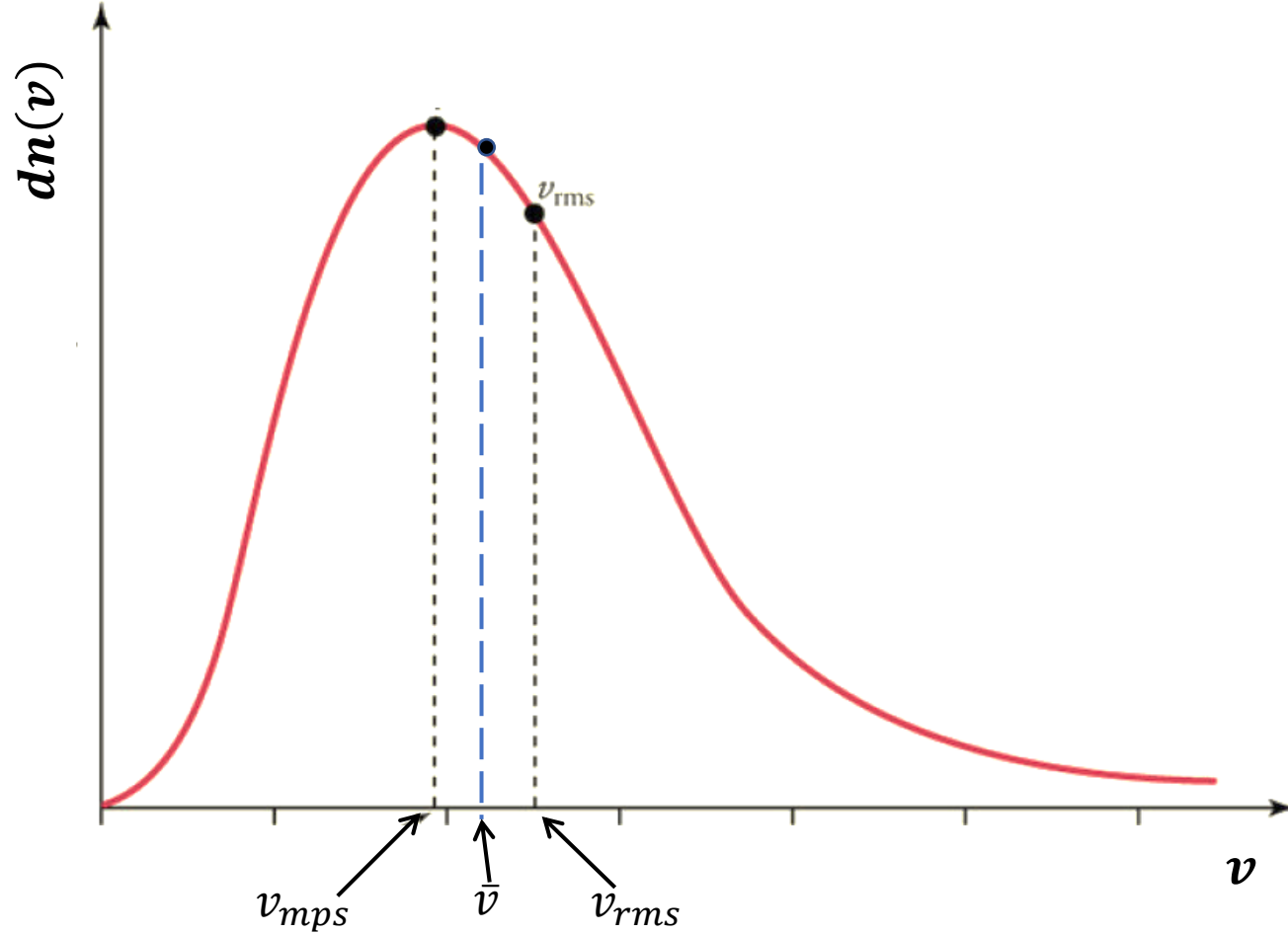
$$(-2 a v_{mps}^3 + 2 v_{mps}) e^{-a v_{mps}^2} = 0$$

$$(-a v_{mps}^3 + v_{mps}) = 0 \rightarrow -a v_{mps}^2 + 1 = 0 \rightarrow v_{mps} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$v_{mps} = \sqrt{\frac{2}{\beta m}} \rightarrow v_{mps} = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}} \rightarrow v_{mps} = \sqrt{\frac{2 R T}{M}} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{R T}{M}}$$

$$v_{mps} = 1.414 \sqrt{\frac{R T}{M}}$$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان



- العلاقة بين السرعات الثلاثة:
- السرعات الثلاثة هي:
- (1) السرعة الأكثر احتمالا v_{mps}
- (2) السرعة المتوسطة $\bar{v}$
- (3) الجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعات v_{rms}
- هذه السرعات لا تختلف قيمها كثيرا عن بعضها البعض ،
- ويربطها التناسب التالي:
- $v_{mps} : \bar{v} : v_{rms} = 1.00 : 1.128 : 1.22$

دالة توزيع السرعات لماكسويل – بولتزمان

مسألة:

- بمعلومية أن الوزن الجزيئي للنيتروجين عند درجة حرارة $T = 1000 \text{ K}$ هو $M = 28 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ ، احسب السرعة المتوسطة والجذر التربيعي لمتوسط مربع السرعات والسرعة الأكثر احتمالاً للنيتروجين عند درجة حرارة $T = 1000 \text{ K}$ ، علماً بأن $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1}$

الحل:

$$\bar{v} = 1.596 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1.596 \sqrt{\frac{8.314 \times 1000}{28 \times 10^{-3}}} = 869.68 \text{ m/s}$$

$$v_{rms} = 1.732 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1.732 \sqrt{\frac{8.314 \times 1000}{28 \times 10^{-3}}} = 943.79 \text{ m/s}$$

$$v_{mps} = 1.414 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1.414 \sqrt{\frac{8.314 \times 1000}{28 \times 10^{-3}}} = 770.5 \text{ m/s}$$

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

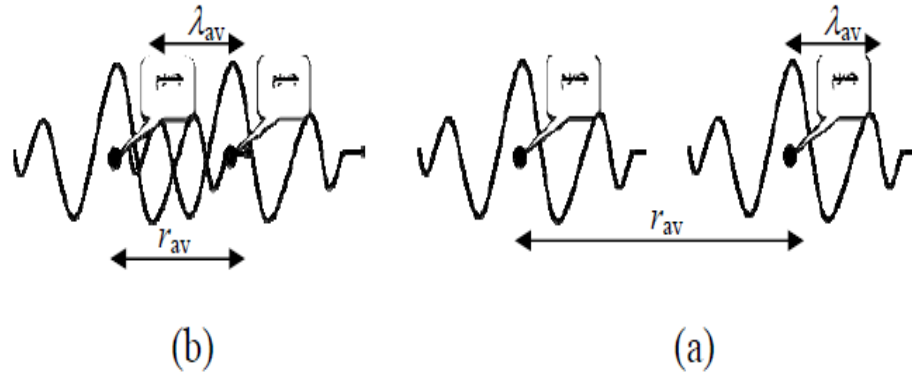
الفصل السادس: الإحصاء الكمي

- الميكانيكا التقليدية: يستطيع المرء أن يحدد إحداثيات جسم وكمية حركته الخطية بدقة متناهية، وفي وقت واحد.
- ميكانيكا الكم: مبدأ عدم التيقن لهيزنبرج الموضح في المعادلة: $\Delta r \Delta p \gg h$ يمنع هذا التحديد. والوصفة التقليدية تعتبر مقبولة في حالة أن الثابت h مهملاً.
- مثال: حركة الجزيء في الغاز حيث أن p_{av} هي متوسط كمية الحركة الخطية ، r_{av} متوسط المسافة بين الجزيئات كما في الشكل (1)

وباستخدام موجة دي-برولي بالطول الموجي حيث أن $\lambda = h/p$

$$r_{av} \gg \lambda_{av} \quad (\text{classical limit})$$

$$r_{av} \ll \lambda_{av} \quad (\text{quantum limit})$$



- λ_{av} هي مقياس لانتشار الجزيء في الفراغ

شكل (1) تداخل موجات دي-برولي المصاحبة لجسيم a- حالة تقليدية b- حالة كمية

ولكي تصبح الوصفة التقليدية ملائمة لابد أن تتحقق الشروط التالية:

- عدد الجسيمات N بالنظام يجب أن تكون قليلة. (غاز ذو كثافة منخفضة)
- درجة الحرارة T يجب أن تكون مرتفعة.
- كتلة جزيء الغاز m ليست صغيرة جدا.

لنتخيل غاز مثالي يتكون من عدد من الجزيئات N مستقرة بمكعب ضلعه r_{av} ويشغل فراغا حجمه V فإن :

$$r_{av}^3 N \approx V \quad \rightarrow \quad r_{av} \approx \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

و أن العلاقة بين درجة الحرارة المطلقة T ومتوسط طاقة حركة الجزيئات ε هي :

$$\varepsilon = \frac{p_{av}^2}{2m} = \frac{3}{2} k_B T \quad \rightarrow \quad p_{av} \cong (3mk_B T)^{1/2}$$

فإن :

$$\lambda_{av} = \frac{h}{p_{av}} = \frac{h}{(3mk_B T)^{1/2}}$$

و بالتالي فإن الشرط التقليدي يصبح:

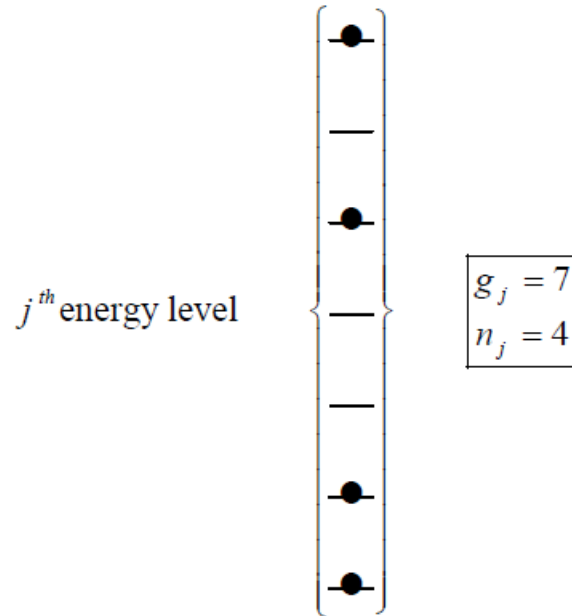
$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \frac{h}{(3mk_B T)^{1/2}}$$

- في الغازات , نجد أن حجم الجزيء عامة أصغر جدا من الحجم المتاح لهو بالتالي فإننا نستطيع , كمبدأ , تحديد كل جزيء في الغاز , و نستطيع التعامل معه تقليديا.
- في المواد الموصلة, نجد أن حجم الإلكترون عامة أكبر من الحجم المتاح له, و منه نجد, أن الدوال الموجية سوف تتداخل إلى حد كبير. و لا نستطيع هنا تحديد الإلكترونات في المعادن, لذلك يصبح الإلكترون غير مميز, و لهذا سوف تلجأ إلى تطبيق طرق ميكانيكا الكم الإحصائية.
- و هناك طريقتين إحصائيتين في هذا المجال, ألا و هما إحصاء فيرمي ديراك و إحصاء بوز – أينشتاين.

إحصاء فيرمي – ديراك:

هو إحصاء يطبق علي الجسيمات غير المميزة، وتسمى فيرميون مثل الالكترونات والبوزيترونات والبروتونات والميونز. وجسيمات الفيرميون لها دوال موجيه مضادة للتماثل وتخضع لمبدأ باولي للاستبعاد (بمعنى أنه لايمكن لأكثر من جسيم أن يشغل نفس المستوى الكمي). هذه الجسيمات لها حركة مغزلية أنصاف أعداد صحيحة فردية من قيمة h .

يعد إحصاء فيرمي- ديراك مهما في دراسة سلوك الإلكترونات الحرة في المعادن وأشباه الموصلات. وفي حالة جسيمات الفيرميون فإن كل مستوى طاقة إما أن يملأ بجسيم واحد فقط أو أن يصبح فارغا كما في الشكل (2)



شكل (٢) أربعة من جسيمات الفيرميون • موزعة علي سبع من المستويات المتساوية الطاقة ϵ_j .

- و لذلك فإن لكل منسوب طاقة j حيث تكون درجة الإلتواء g_j نجد أن عدد الجسيمات n_j أقل من أو تساوي g_j بمعنى أنه $n_j \leq g_j$ و لمجموعة من المستويات عددها g_j يمكن تقسيمها إلى مجموعتين الأولى عددها n_j وتحتوي كل منها على جسيم منفرد و الثانية $(g_j - n_j)$ فارغة من الجسيمات
- و للحصول على حالات مجهرية جديدة بواسطة منسوب طاقة j :

$$\omega_{FD}(j) = \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}$$

- بالتالي فإن العدد الكلي للحالات المجهرية المناظر لترتيب مسموح به هو ببساطة حاصل ضرب المعادلة أعلاه لكل مناسب الطاقة كما يلي :

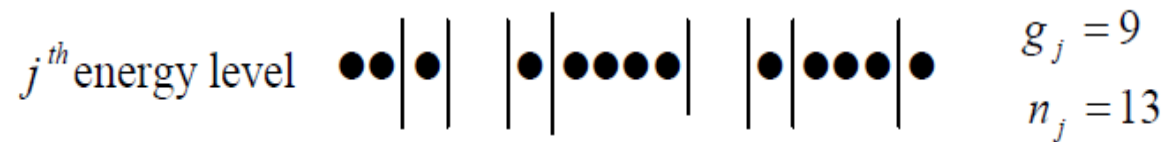
$$\Omega_{FD} = \prod_{j=1}^n \frac{g_j!}{n_j! (g_j - n_j)!}$$

إحصاء بوز-اينشتين :

هو إحصاء يطبق علي الجسيمات الغير مميزة وتسمى بوزون، مثل الفوتونات والفونونات. وجسيمات البوزون لها دوال موجيه متماثلة ولا تخضع لمبدأ باولي للاستبعاد ، كما أن الحركة المغزلية لها تأخذ أعداد صحيحة من قيمة h .

يعد إحصاء بوز أينشتين مهما في:

- دراسة سلوك فوتونات الإشعاع.
- سلوك جزيئات الغاز عند درجات الحرارة المنخفضة (مثل تكثف بوز-آينشتين).



شكل (٣) ثلاثة عشر من جسيمات البوزون • موزعة علي تسع من المستويات المتساوية الطاقة ϵ_j .

طريقة حساب عدد الحالات المجهرية للبوزون تعتبر أكثر تعقيداً من توزيع فيرمي-ديراك حيث يوضح الشكل (3) ترتيب عدد n_j من الجسيمات الغير المميزة خلال g_j من المستويات و المقسمة بواسطة $(g_j - 1)$ من الخطوط

- و للحصول على حالات مجهرية جديدة بواسطة خلط الخطوط والجسيمات مع احتفاظنا بالأعداد $n_j g_j$ ثابتة لكل منسوب طاقة j

$$\omega(j) = \frac{(n_j + g_j - 1)!}{n_j! (g_j - 1)!}$$

- بالتالي فإن العدد الكلي للحالات المجهرية المناظر لترتيب مسموح به هو ببساطة حاصل ضرب المعادلة أعلاه لكل مناسب الطاقة كما يلي :

$$\Omega_{BE} = \prod_{j=1}^n \frac{(n_j + g_j - 1)!}{n_j! (g_j - 1)!}.$$

والجدول التالي يلخص الفروق المهمة للتوزيعات الثلاثة.

	B.E. (Bosons)	F.D. (Fermions)	M.B.
الجسيمات	Indistinguishable غير مميزة	Indistinguishable غير مميزة	Distinguishable مميزة
الدالة الموجية	Symmetric متماثلة	Antisymmetric غير متماثلة	متماثلة وغير متماثلة
Spin	$0, \hbar, 2\hbar, \dots$	$\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$	Any
أمثله للجسيمات	photons, phonons, ^4He , π -meson,	electron, proton, ^3He	أي جسيمات
n_i	0,1,2,.....	0,1	0,1,2,.....
$\omega(i)$	$\omega_{BE} = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!}$	$\omega_{FD} = \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$	$\omega_{MB} = \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} (*)$
Ω	$\Omega_{BE} = \prod_{i=1}^r \omega_{BE}$	$\Omega_{FD} = \prod_{i=1}^r \omega_{FD}$	$\Omega_{MB} = \prod_{i=1}^r \omega_{MB}$
$f(\varepsilon_i) = \frac{n_i}{g_i}$	$\frac{1}{e^{-\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1}$	$\frac{1}{e^{-\alpha + \beta \varepsilon_i} + 1}$	$e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}$
Applications	Photons of radiation, gas molecules at very Low temperature)	Free electrons in metal and semi- conductor (except at very H. temp.)	Gas molecules (except near 0 K), electrons at Extremely H. temp.

• مثال 1:

نعتبر نظام مكون من ثلاث جسيمات $N=3$ ومستويي طاقة ε_1 و ε_2 حيث $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1)$ كما بالشكل التالي. المستوى ε_1 ثنائي الانتماء معنى أن $g_1 = 2$ و يتشبع بجسمين. و المستوى ε_2 أحادي الإنتماء و يتشبع بجسيم واحد فقط. احسب عدد المستويات المجهرية لكل إحصاء.

$$n_2 = 1 \quad \text{————} \quad \varepsilon_2$$

$$n_1 = 2 \quad \text{=====} \quad \varepsilon_1$$

الحل:

نعلم أن $g_1 = 2$ و عدد الجسيمات بالمستوى الأول هو و بالمستوى الثاني. لذلك نستطيع أن نكون الجدول التالي لكل مستوي علي حدة، ومنه نحسب عدد المستويات المجهرية لكل توزيع إحصائي.

i^{th} level	n_i	g_i	$\omega_{FD}(i) = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$	$\omega_{BE}(i) = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!(g_i - 1)!}$	$\omega_{MB}(i) = \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$
1	2	2	$\frac{2!}{2!(2-1)!} = 1$	$\frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = 3$	$\frac{2^2}{2!} = 2$
2	1	1	$\frac{1!}{1!(1-1)!} = 1$	$\frac{(1+1-1)!}{1!(1-1)!} = 1$	$\frac{1^1}{1!} = 1$
			$\Omega_{FD} = \prod_{i=1}^2 \omega_{FD}(i) = 1$	$\Omega_{BE} = \prod_{i=1}^2 \omega_{BE}(i) = 3$	$\Omega_{MB} = 3! \prod_{i=1}^2 \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} = 12$

• مثال 2:

نظام يتكون من جسيمين بداخل حجم V بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاث ذو الطاقات, $\varepsilon_1=0$ و $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=3$ احسب دالة التجميع إذا تحقق:

1. أن الجسيمات تتبع إحصاء ماكسويل بولتزمان

2. أن الجسيمات تتبع إحصاء بوز أينشتاين

3. أن الجسيمات تتبع إحصاء فيرمي ديراك

• الحل:

1. إحصاء ماكسويل بولتزمان : نعلم أنه في حالة إحصاء ماكسويل بولتزمان تكون الجسيمات مميزة. فرضا مثل A,B , وبإمكان المستوى أن يتشبع بجسيم او أكثر كما بالجدول التالي:

ϵ_i	Microstates					
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
3			AB		B	B
1		AB		B		A
0	AB			A	A	
E_i	0	2	6	1	3	4
ω_i	1	1	1	2	2	2

$$Z_{MB} = \sum_i g_i e^{(-\beta E_i)} = 1 + e^{(-2\beta\epsilon)} + e^{(-6\beta\epsilon)} + 2e^{(-\beta\epsilon)} + 2e^{(-3\beta\epsilon)} + 2e^{(-4\beta\epsilon)}$$

نلاحظ هنا أن عدد المستويات التي بها جسيمين مميزين هم 3 مستويات مجهرية، والتي بها جسيم واحد فقط هم 6 مستويات مجهرية، والمجموع الكلي للمستويات المجهرية هي 9

• الحل:

2. إحصاء بوز أينشتاين : نعلم أنه في حالة إحصاء بوز أينشتاين يحتوي المستوى على أي عدد من الجسيمات الغير مميزة. فرضا مثل A, A , كما بالجدول التالي:

ϵ_i	Microstates					
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
3			AA		A	A
1		AA		A		A
0	AA			A	A	
E_i	0	2	6	1	3	4
ω_i	1	1	1	1	1	1

$$Z_{BE} = \sum_i g_i e^{(-\beta E_i)} = 1 + e^{(-2\beta\epsilon)} + e^{(-6\beta\epsilon)} + e^{(-\beta\epsilon)} + e^{(-3\beta\epsilon)} + e^{(-4\beta\epsilon)}$$

نلاحظ هنا أن عدد المستويات التي بها جسيمين هم 3 مستويات مجهرية، والتي بها جسيم واحد فقط هم 3 مستويات مجهرية، والمجموع الكلي للمستويات المجهرية هي 6

• الحل:

3. إحصاء فيرمي ديراك : في حالة إحصاء فيرمي ديراك لا يحتوي المستوى على أكثر من جسيم غير مميز. فرضا مثل A, كما بالجدول التالي:

ϵ_i	Microstates		
	k_1	k_2	k_3
3		A	A
1	A		A
0	A	A	
E_i	1	3	4
ω_i	1	1	1

$$Z_{FD} = \sum_i g_i e^{(-\beta E_i)} = e^{(-\beta \epsilon)} + e^{(-3\beta \epsilon)} + e^{(-4\beta \epsilon)}$$

نلاحظ هنا أنه لا يوجد مستويات بها جسيمين و المستويات المجهرية التي بها جسيم واحد فقط هم 3 مستويات مجهرية، والمجموع الكلي للمستويات المجهرية هي 3

• مثال 3:

نظام يتكون من جسيمين غير مميزين. بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاث ذو الطاقات, $\epsilon_1=0$ و $\epsilon_2=1$, $\epsilon_3=2$ المستوى الأول $\epsilon_1=0$ ثنائي الانتماء, بمعنى أن $g_1=2$ والمستويات الأخرى أحادية الانتماء. أحسب دالة التجميع و الطاقة المتوسطة للنظام إذا تحقق:

1. أن الجسيمات تتبع إحصاء فيرمي ديراك
2. أن الجسيمات تتبع إحصاء بوز أينشتاين
3. احسب الطاقة المتوسطة للنظام عندما $(T \rightarrow \infty)$, ما هو تعليقك على النتيجة النهائية؟

• الحل:

1. إحصاء فيرمي ديراك : سوف نحصل على التوزيع التالي للحالات المجهرية:

ε_i	Microstates											
	k_1		k_2		k_3		k_4		k_5		k_6	
(2ε)	0		0		0		a		a		a	
(1ε)	0		a		a		0		0		a	
0	a	a	a	0	0	a	0	a	0	a	0	0
E_i	0		ε		ε		2ε		2ε		2ε	

$$Z_{FD} = \sum_i g_i e^{(-\beta E_i)} = 1 + 2e^{(-\beta\varepsilon)} + 2e^{(-2\beta\varepsilon)} + e^{(-3\beta\varepsilon)}$$

و الطاقة المتوسطة

$$U_{FD} = -\frac{1}{Z_{FD}} \frac{\partial Z_{FD}}{\partial \beta} = \frac{2\varepsilon e^{(-\beta\varepsilon)} + 4\varepsilon e^{(-2\beta\varepsilon)} + 3\varepsilon e^{(-3\beta\varepsilon)}}{1 + 2e^{(-\beta\varepsilon)} + 2e^{(-2\beta\varepsilon)} + e^{(-3\beta\varepsilon)}} \rightarrow \frac{3}{2} \varepsilon \quad \text{as } T \rightarrow \infty$$

2. إحصاء بوز أينشتاين: سوف نحصل على التوزيع التالي للحالات المجهرية:

ε_i	Microstates									
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5					
(2ε)	0	0	0	0	0					
(1ε)	0	0	0	a	a					
0	aa	0	0	aa	a	a	a	0	0	a
E_i	0	0	0	ε	ε					

ε_i	Microstates									
	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}					
(2ε)	a	a	0	a	aa					
(1ε)	0	0	aa	a	0					
0	a	0	0	a	0	0	0	0	0	0
E_i	2ε	2ε	2ε	3ε	4ε					

و تصبح دالة التجميع

$$Z_{BE} = \sum_i g_i e^{(-\beta E_i)} = 3 + 2e^{(-\beta \varepsilon)} + 3e^{(-2\beta \varepsilon)} + e^{(-3\beta \varepsilon)} + e^{(-4\beta \varepsilon)}$$

و الطاقة المتوسطة

$$U_{BE} = -\frac{1}{Z_{BE}} \frac{\partial Z_{BE}}{\partial \beta} = \frac{2\varepsilon e^{(-\beta \varepsilon)} + 6\varepsilon e^{(-2\beta \varepsilon)} + 3\varepsilon e^{(-3\beta \varepsilon)} + 4\varepsilon e^{(-4\beta \varepsilon)}}{3 + 2e^{(-\beta \varepsilon)} + 3e^{(-2\beta \varepsilon)} + e^{(-3\beta \varepsilon)} + e^{(-4\beta \varepsilon)}} \rightarrow \frac{3}{2} \varepsilon \quad \text{as } T \rightarrow \infty$$

من النتيجة النهائية للطاقة المتوسطة نجد أنه عند درجات الحرارة المرتفعة فإن إحصاء بوز-أينشتاين و فيرمي-ديراك يؤولان إلى إحصاء ماكسويل-بولتزمان التقليدي.

• مثال 4:

نظام يتكون من جسيمين غير مميزين بداخل حجم V . بإمكان أي من الجسيمين التواجد بأي مستوى من المستويات الكمية الثلاث ذو الطاقات, $\varepsilon_1=0$ و $\varepsilon_2=(1\varepsilon)$, $\varepsilon_3=(2\varepsilon)$. أحسب دالة التجميع و $\bar{n}_1$ و $\bar{n}_2$ و $\bar{n}_3$ للمستويات الثلاث إذا تحقق :

1. أن الجسيمات تتبع إحصاء بوز أينشتاين

2. أحسب $\bar{n}_1$ و $\bar{n}_2$ و $\bar{n}_3$ والطاقة المتوسطة للنظام عندما $(T \rightarrow 0)$, ما هو تعليقك على النتيجة النهائية؟

• الحل:

1. إحصاء بوز أينشتاين : سوف نحصل على التوزيع التالي للحالات المجهرية:

ε_i	Microstates					
	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
(2ε)	0	0	1	0	1	2
(1ε)	0	1	0	2	1	0
0	2	1	1	0	0	0
E_i	0	ε	2ε	2ε	3ε	4ε

$$Z_{BE} = \sum_i g_i e^{(-\beta E_i)} = 1 + e^{(-\beta \varepsilon)} + 2e^{(-2\beta \varepsilon)} + e^{(-3\beta \varepsilon)} + e^{(-4\beta \varepsilon)} = (1 + e^{(-2\beta \varepsilon)})(1 + e^{(-\beta \varepsilon)} + e^{(-2\beta \varepsilon)})$$

و باستخدام القانون العام

$$\bar{n}_i = -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_i}$$

$$\bar{n}_1 = -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_1} = \frac{2 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)}}{(1 + e^{(-2\beta\varepsilon)})(1 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)})}$$

$$\bar{n}_2 = -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_2} = \frac{e^{(-\beta\varepsilon)}(1 + 2 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)})}{(1 + e^{(-2\beta\varepsilon)})(1 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)})}$$

$$\bar{n}_3 = -\frac{1}{\beta Z_{BE}} \frac{\partial Z_{BE}}{\partial \varepsilon_3} = \frac{e^{(-2\beta\varepsilon)}(1 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)})}{(1 + e^{(-2\beta\varepsilon)})(1 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)})}$$

و تصبح الطاقة الداخلية

$$U = \bar{n}_1 \varepsilon + \bar{n}_2 \varepsilon + \bar{n}_3 \varepsilon = \frac{\varepsilon e^{(-\beta\varepsilon)}(1 + 4e^{(-\beta\varepsilon)} + 3e^{(-2\beta\varepsilon)} + 4e^{(-3\beta\varepsilon)})}{(1 + e^{(-2\beta\varepsilon)})(1 + e^{(-\beta\varepsilon)} + e^{(-2\beta\varepsilon)})}$$

و عندما تؤول T إلى الصفر تؤول الطاقة المتوسطة للصفر

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

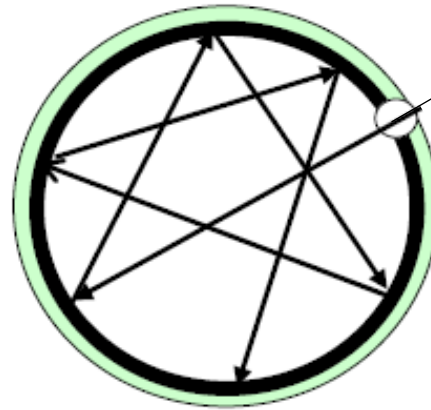
الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل السابع: تطبيقات إحصاء بوز – أينشتين

Applications of Bose-Einstein Statistics

إشعاع الجسم الأسود (Black body radiation)

شعاع ضوئي ساقط



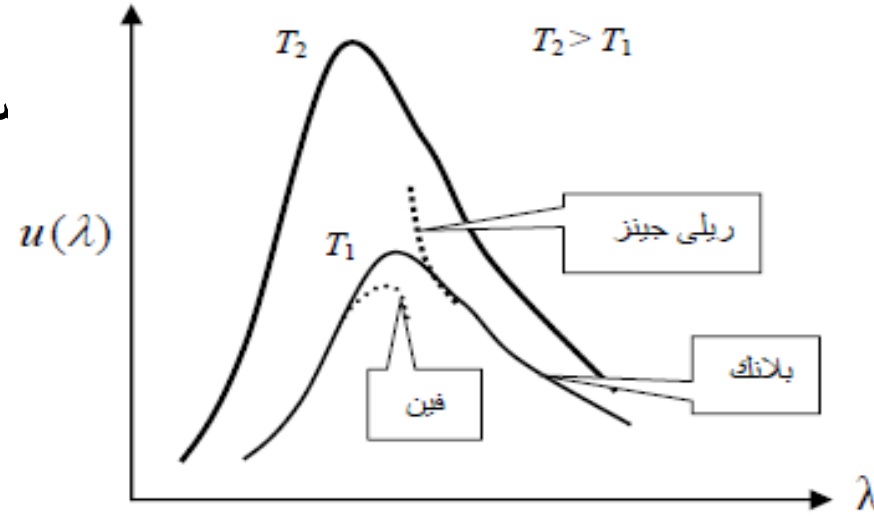
شكل نموذجي للجسم الأسود

- يعرف الجسم الأسود (وهو جسم نظري) بأنه الجسم الذي له أعلى قدرة امتصاصية للأشعة الكهرومغناطيسية الساقطة عليه، وبالتالي فلن يكون هناك ضوء ينعكس منه، ولذلك لا نستطيع تحديد لونه. وحيث إن قدرته عالية للامتصاص فإن قدرته عالية أيضاً على الإشعاع.
- نستطيع تمثيل الجسم الأسود بجسم مغلق، أجوف، ذي سطح داخلي مطلي باللون الأسود وبه ثقب صغير كما بالشكل بالأعلى

- إن الجسم الأسود يمتص كل الضوء الساقط عليه من خلال الثقب حيث إن الأشعة النافذة خلال الثقب لن يسمح لها بالخروج مرةً أخرى، وذلك نتيجة للانعكاسات

المتتالية

مع ضوءا يحتوي على



- عند تسخين الجسم الأد جميع الأطوال الموجية

مخطط لتوزيع الطاقة الإشعاعية $u(\lambda)$ للجسم الأسود مع طول الموجة λ عند درجات حرارة مختلفة

المعالم الاستقرائية للجسم الأسود

- يمتص كل الأشعة الساقطة (ولا يعكسها) بغض النظر عن الطول الموجي أو الاتجاه.
- له قدرة عالية على الاشعاع (في جميع الاتجاهات) بالمقارنة للأجسام الأخرى.
- منحني الطاقة الإشعاعية المنبعثة من الجسم الأسود لا يعتمد على طبيعة مادته، ولكن يعتمد على درجة حرارته (T)
- المنحنيات عند درجة الحرارة المنخفضة تقع تماماً بداخل المنحنيات ذات درجات الحرارة المرتفعة.
- عند درجة حرارة ثابتة (T) تزداد الطاقة الإشعاعية المنبعثة من الجسم الأسود كلما ازداد طول الموجة، ثم تصل إلى القيمة العظمى (λ_{max}) تبدأ بعدها الطاقة في الانخفاض بزيادة الطول الموجي.

- قانون فين للإزاحة وينص على أن:

"العلاقة بين القيمة العظمى للطول الموجي (λ_{max}) ودرجة الحرارة المطلقة (T) للجسم هي علاقة عكسية" بمعنى أن:

$$\lambda_{max} T = \text{ثابت}$$

- قانون ستيفان للمساحة: ينص على أن:

"الطاقة الإشعاعية الكلية لوحدة المساحات عند درجة حرارة ثابتة (T) تعرف بالمساحة المحصورة بين المنحنى المحدد بقيمة (T) ومحور الطول الموجي وتعطى بالعلاقة: $u = bT^4$ "

حيث b ثابت وقيمته هي:

$$b = 7.55 \times 10^{-16} \text{ J } m^{-3} K^{-4}$$

- قانون ريلي-جينز (Rayleigh-Jeans law) وينص على أنه:

"عند الترددات المنخفضة (الأطوال الموجية الطويلة) تُعرف الطاقة الإشعاعية بالعلاقة:

$$u(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4}$$

- قانون فين (Wien's law) وينص على أنه:

"عند الترددات المرتفعة (الأطوال الموجية القصيرة) تعرف الطاقة الإشعاعية بالعلاقة:

$$u(\lambda) \propto \lambda^{-5} e^{d/\lambda T}$$

حيث d ثابت

"الكارثة الفوق بنفسجية (Ultra-violet catastrophe) و ثابت بلانك

- من معرفتنا بمبادئ الفيزياء التقليدية نتوقع أن الجسم الساخن يشع باستمرار كل حرارته علي هيئة موجات كهرومغناطيسية. ولكن من قانون ريلي- جينز نجد أن معدل لإشعاع يصل إلى مالانهاية عندما يؤول الطول الموجي الكهرومغناطيسي إلى الصفر. وسميت هذه المعضلة غير المنطقية حين ذاك بلغز "الكارثة الفوق بنفسجية وأصبح السؤال: ماهو السبب في هذا اللغز نظرياً؟ وكيف السبيل إلى حله؟
- نجح بلانك في حل المعضلة وذلك بفرض أن: "طاقة الجسم الإشعاعية، الممتصة أو المنبعثة، لا تمثل فيضا من القيم المتصلة ولكن تتكون من وحدات طاقة لا تتجزأ وسميت طاقة كم "Quanta" ومقدار الطاقة "E" التي يحملها كل طاقة كم تتناسب مع تردد الإشعاع "ν" بمعنى أن:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

حيث h هو ثابت بلانك

- واشتق بلانك علاقته المشهورة للطاقة الإشعاعية في الصورة:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}$$

• مثال:

اثبت قانون فين للإزاحة.

• الحل:

لإثبات قانون فين للإزاحة، فإننا نبحث عن الطول الموجي الذي تكون فيه كثافة الطاقة المعطاة بالمعادلة السابقة في قيمتها العظمى وذلك باستخدام الشرط:

$$\left. \frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0$$

وهذا الشرط يعطينا المعادلة:

$$X = 5(1 - e^{-X})$$

حيث $x = \frac{\beta hc}{\lambda_{\max}}$ بالإمكان حل المعادلة الأخيرة عددياً أو بالرسم البياني وحلها هو:

$$x = \frac{\beta hc}{\lambda_{\max}} = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} = 4.965$$

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.965 k_B} = 2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

مثال:

باستخدام قانون الإزاحة لفين احسب درجة حرارة سطح القمر إذا علم أن الطيف يصل ذروته عند الموجة $\lambda_{\max} = 14 \times 10^{-6} \text{ m}$ اعتبر ان القمر جسم اسود

الحل:

باستخدام قانون الإزاحة لفين $T = 2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}$ نجد ان درجة حرارة سطح القمر هي:

$$T = \frac{2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}}{\lambda_{\max}} = \frac{2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}}{14 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 207 \text{ K}$$

• خواص الفوتونات هي:

- الحركة المغزلية للفوتونات لها القيمة ($\hbar$) ولذلك يطبق عليها إحصاء بوز-أينشتين.
- لا تؤثر الفوتونات المثالية علي بعضها البعض.
- كتلة الفوتون الساكنة منعدمة (zero rest mass) لذلك فهو يتحرك بسرعة الضوء.
- الفوتون يحقق علاقة التشتت ($\omega = ck$ (Dispersion relation) وبالتالي فإن: $E = \hbar\omega = \hbar ck$
- للفوتونات نجد أن كمية الحركة الخطية تعرف بدلالة الطول الموجي λ او التردد ν كالتالي:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{c} \nu$$
$$dp = \frac{h}{c} d\nu$$

حيث c هو سرعة الضوء في الفراغ

وباعتبار أن الفوتونات محتوية داخل جسم مغلق أجوف ذي حجم ثابت v ومتزن حرارياً عند درجة حرارة T مع الوسط المحيط به، فإن عدد الأنماط (مستويات الفوتونات) المتواجدة بين القيمتين p و $p + dp$ تعطى من العلاقة

$$g(p)dp = 2 \times 4\pi \frac{p^2}{h^3/V} dp$$

وعدد الأنماط المتواجدة بين قيمتي التردد v و $v + dv$ تعطى بالعلاقة:

$$g(v)dv = 2 \times 4\pi V \frac{v^2}{c^3} dv$$

حيث استخدم العدد 2 في المعادلين السابقتين نتيجة الاتجاهين المستقلين لاستقطاب الإشعاع الكهرومغناطيسي

بالتالي فإن توزيع إحصاء بوز- أينشتين للفوتونات يعطي:

$$dn(v) = n(v)dv = \frac{g(v)dv}{e^{\alpha + \beta \epsilon} - 1} = 8\pi V \frac{v^2}{c^3} \frac{dv}{e^{\alpha + \beta \epsilon} - 1}$$

حيث $\epsilon = hv$ وكثافة الطاقة ϵ $u = \frac{dn}{V} \epsilon$ في المدى المحدد هي:

$$u(v)dv = g(v) \frac{hvdv}{e^{\alpha + \beta \epsilon} - 1} = 8\pi h \frac{v^3}{c^3} \frac{dv}{e^{\alpha + \beta \epsilon} - 1}$$

وهذه المعادلة تؤول إلي علاقة بلانك المشهورة للإشعاع هذا إذا استخدمنا القيم التالية للفوتونات:

$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

• وهذا يعني ببساطة أننا أهملنا الشرط

$$\delta N = \sum \delta n = 0$$

والذي يدل على أن العدد الكلي للفوتونات يظل ثابتاً. بالطبع فإن الفوتونات تختلف عن جسيمات البوزون، ففي أن عدد الفوتونات الكلية لا يكون ثابتاً وذلك كنتائج عن ظاهرة الخلق Creation والإفناء Annihilation

• واجب منزلي: باستخدام التعويضات التالية:

$$v = c / \lambda , \quad dv/d\lambda = - c / \lambda^2 , \quad u(\lambda) = - u(v) (dv/d\lambda) = u(v) (c / \lambda^2)$$

اثبت أن المعادلة (5) تؤول إلى قانون بلانك (انظر المعادلة 1).

تعليقات:

- 1- عند الترددات المنخفضة ($h\nu \ll k_B T \Rightarrow \beta h\nu \ll 1$) نستخدم التقريب:

$$e^{\beta h\nu} - 1 \approx 1 + \beta h\nu - 1 \approx \beta h\nu$$

فبذلك أن المعادلة (5) تؤول إلى قانون ريلي-جينز:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (6)$$

- 2- عند الترددات المرتفعة ($h\nu \gg k_B T \Rightarrow \beta h\nu \gg 1$) نستخدم التقريب:

$$e^{\beta h\nu} - 1 \approx \beta h\nu$$

فبذلك أن المعادلة (5) تؤول إلى قانون فين:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\beta h\nu} d\nu \quad (7)$$

- 3- لإيجاد كثافة الطاقة الكلية نكامل المعادلة (5) لجميع أنماط التذبذب الممكنة، وهي تأخذ القيم من صفر إلى ما لا نهاية بالنسبة للأشعة الكهرومغناطيسية، كالتالي:

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu \quad (8)$$

وباستخدام التعويض ($x = \beta h\nu$) نجد:

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = bT^4 \quad (9)$$

وهو قانون ستيفان-بولتزمان، حيث:

$$b = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} = 7.55 \times 10^{-16} Jm^{-3}K^{-4}$$

وقد تم التحقق من هذه العلاقة عملياً.

► 4- الحرارة النوعية للجسم التام السواد تأتي بالتالي عن طريق تفاضل المعادلة (9) لنحصل على:

$$c_v = 4bT^3 \quad (11)$$

وهي تؤول للصفر عندما تصل درجة حرارة الجسم للصفر المطلق، والمعادلة (11) تشبه معادلة ديبياي للأجسام الصلبة.

واجب منزلي:

للفوتونات اثبت الآتي:

$$\bullet \quad Z_{\text{photon}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_i}} \quad (12)$$

$$\bullet \quad F = -\frac{1}{3} bVT^4 \quad (13)$$

$$\bullet \quad S = \frac{4}{3} bVT^3 \quad (14)$$

$$\bullet \quad P = \frac{1}{3} bT^4 \quad (15)$$

$$\bullet \quad E = F = TS = bVT^4 \quad (16)$$

2- تكثيف بوز – أينشتين Bose-Einstein Condensation

لنظام يتكون من عدد من جسيمات البوزون المستقلة والمحددة بوعاء ذو حجم V ودرجة حرارية مطلقة T ، نجد أن التوزيع الأكثر احتمالاً

$$f(\varepsilon_i) = \frac{N_i^*}{g_i} = \frac{1}{e^{-\beta\mu + \beta\varepsilon_i} - 1} \quad (1) \quad \text{هو}$$

حيث الرمز N_i^* يمثل عدد جسيمات البوزون التي لها الطاقة ε_i و g_i هو درجة الانتماء ويعبر عن المستويات التي لها نفس الطاقة ε_i ومن شرط ثبوت العدد الكلي للجسيمات داخل النظام المغلق نجد أن:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i^* = \sum_{(levels)} \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} = \frac{g_0}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} + \frac{g_1}{e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} - 1} + \dots = N_0 + N_1 + \dots \quad (2)$$

حيث التجميع يتم بالمعادلة (2) على جميع مناسيب الطاقة، ولكي نحافظ لكل منسوب بعدد موجب للجسيمات N_i ، فيجب تحقق الشرط

$$\mu \leq 0, \quad \text{or} \quad e^{-\beta\mu} \geq 1$$

دعونا نركز الآن على عدد الجسيمات بالمستوى الأرضي باعتبارها N_0 ، حيث طاقة المستوى $\varepsilon_0 = 0$ ، نجد أن:

$$N_0 = f(\varepsilon_0 = 0) = \frac{1}{e^\alpha - 1}$$

بالتأكيد يجب أن تكون القيمة $\alpha > 0$ لنحصل على عدد موجب ومحدد من الجسيمات.

ولتعيين علاقة e^α مع درجات الحرارة المطلقة، سوف نفترض أنه يقترب بدرجة الحرارة الغاز من الصفر المطلق فإن $N_0 = N$ لذلك نجد أن:

$$N = \frac{1}{e^\alpha - 1} \Rightarrow \alpha = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \approx \frac{1}{N}$$

وحيث أن N هو عدد فلكي، فإننا نستطيع، وبدون أخطاء حسابية، أن نضع $\alpha = 0$, or $e^\alpha = 1$ بالمعادلة (1) عند درجات الحرارة المنخفضة. لهذا نجد أن المستوى الأرضي يمكن أن يملأ جزءاً كبيراً جداً من الجسيمات الكلية.

الآن لكي نحسب العدد الكلي لجسيمات البوزون بالمستويات المثارة، والذي يتساوى مع العدد الكلي للجسيمات عند درجات الحرارة المرتفعة، دعونا نحسبه كلاسيكياً باستخدام المعادلة:

$$N_e = N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i^* = \int_0^{\infty} \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\alpha + \beta \epsilon} - 1} \quad (2a)$$

(levels)

وباستخدام كثافة الشحنات بالصورة $\sqrt{\epsilon}$ ، نجد أن عدد الجسيمات الكلية هو:

$$N_e = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\alpha + \beta \epsilon} - 1} = \frac{V}{\lambda^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{z^{-1} e^x - 1} \quad (3)$$

وقد استخدمنا $x = \beta \epsilon$ والبارامترات التالية:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

الطول الموجي لدي-برولي

الفعالية المطلقة للغاز (Absolute activity) أو (Fugacity) $z = e^{-\alpha} = e^{\mu\beta} \leq 1$

لنا هنا تعليق مهم على المعادلة (3)، وهو أن المعامل $\sqrt{\epsilon}$ بكثافة المستويات يضمن عدم إسهام جسيمات المستوى الأرضي ($\epsilon=0$) بالحسابات، ولذلك نستطيع وضع $z=1$ حيث أننا أهملنا المستوى الأرضي.

والآن باستخدام التكامل القياسي: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = 1.306\sqrt{\pi}$

فإن المعادلة (3) تؤول إلى:

$$N_e = 2.612V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (4)$$

وكما نعرف، فإن جسيمات البوزون تفضل التجمع في نفس المستوى، وهذا عكس جسيمات الفرميونات.

من هنا نجد أنه عندما تصل درجة حرارة الغاز T إلى درجة الحرارة الحرجة T_B فإن جسيمات البوزون تبدأ في التجمع في المستوى الأرضي، ولكن تظل كثافتها بالمستويات المثارة مرتفعة جداً، بمعنى أن $N_e \approx N$.

أما إذا انخفضت درجة حرارة الغاز عن T_B فإن كثافة جسيمات البوزون تزداد بالمستوى الأرضي، حيث أن $\alpha \propto N^{-1}$ وعندما تصل درجة الحرارة إلى الصفر المطلق، فإن جميع الجسيمات تملأ المستوى الأرضي فقط، لذلك عند $T = 0$ نجد أن $N_0 = N$ ولحساب درجة الحرارة الحرجة، نعوض بـ T_B ، و N بالمعادلة (4) نحصل على:

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{2.612V} \right)^{2/3} \quad (5)$$

بقسمة المعادلتين (4) و (5) نحصل على عدد الجسيمات بالمستويات المثارة كدالة في درجة الحرارة بالمعادلة:

$$N_e = N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (6)$$

وباقى الجسيمات والتي تتجمع بالمستوى الأرضي تصبح:

$$N_0 = N - N_e = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \right] \quad (7)$$

مثال:

لمول واحد من غاز الهيليوم ^4He تحت ضغط جوي 1 ، احسب T_B

الحل:

لمول واحد من الغاز، نعلم أن $N = N_A = 6.02 \times 10^{23}$ molecules/mol ،

وحجم الغاز تحت ضغط جوي هو $V = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ ،

وكتلة الغاز هي $m = 4 \times 1.66 \times 10^{-27} = 6.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$

وباستخدام المعادلة (5) نجد أن

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{2.612V} \right)^{2/3} = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2\pi (6.65 \times 10^{-27}) \times 1.38 \times 10^{-23}} \left(\frac{6.02 \times 10^{23}}{2.612 \times 22.4 \times 10^{-3}} \right)^{2/3} = 0.036 \text{ K}$$

وهي قيمة صغيرة جداً مقارنة بدرجة الحرارة العملية وهي 4.21 K وبملاحظة عامة، فإن جميع الغازات المثالية تتحول إلى الحالة السائلة قبل أن تصل إلى درجة الحرارة الحرجة.

واجب منزلي: لمول واحد من غاز H_2 تحت ضغط جوي 1 ، احسب T_B

قارن النتيجة مع القيمة العملية 14 K

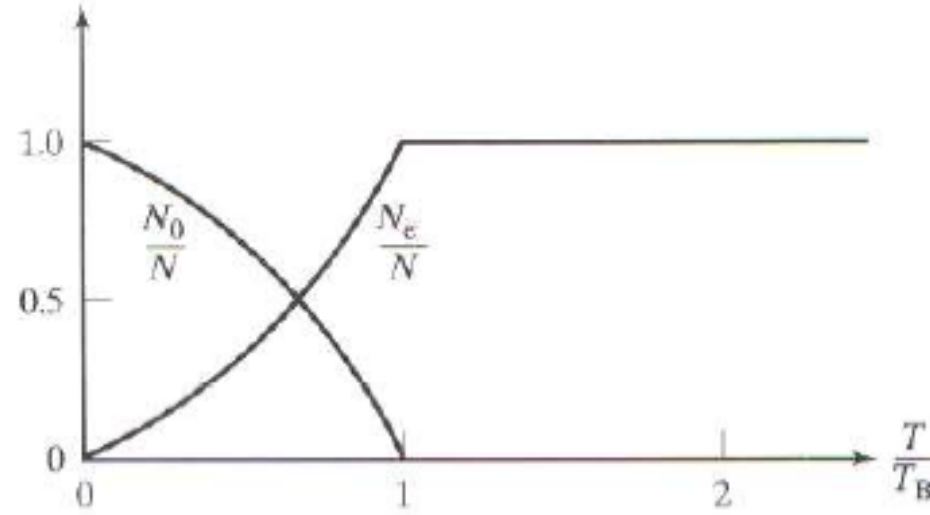
➤ استخدام التكامل بدلا من التجميع بالمعادلة (2a) عند درجات حرارة منخفضة $T < T_B$ ، أحدث خطأ جسيماً نتيجة إهمال الحد g بكثافة المستويات، وبالتالي إهمال الاسهام الكبير الناتج من المستوى الارضي. $\rho = 0$

➤ وللقيم الصغيرة من z (او كبيرة من $e^{-\beta\mu}$) ، فان اسهام المستويات الأولية يكون منعما، وبالتالي استخدام التكامل لا ينشأ عنه خطأ جوهري او محسوس.

➤ عندما تقترب z من الواحد الصحيح (او صغيرة من $e^{-\beta\mu}$)، فان المستوى الأرضي يصبح مهم وإهماله يجعل تجاوزه خطأ جسيماً. ولذلك لا نستطيع تغيير التجميع إلى تكامل عندما نقرب من الصفر المطلق.

➤ وهذا التكتيف للجسيمات يحدث عندما تقل درجة حرارة النظام عن T_B ، وتسمى هذه الظاهرة بظاهرة تكتيف بوز-أينشتين.

والشكل (3) يوضح كيف يتغير (N_e/N) و (N_0/N) مع درجة الحرارة المطلقة للغاز.



شكل (٣) تغير $\frac{N_e}{N}$ و $\frac{N_o}{N}$ مع درجة الحرارة المطلقة.

لسنوات عديدة، اعتقد الفيزيائيون أن تكثيف بوز-أينشتين ضرب من الخيال ولا يوجد في الطبيعة. ولكن في عام 1995 تم تحقيقه تجريبياً بواسطة تكثيف بخار من ذرات الروبيديوم لدرجة حرارة $1.3 \times 10^{-7} \text{ K}$ وعد هذا أهم إنجازات الفيزياء التجريبية خلال القرن الماضي، وقد فتح هذا الإنجاز الباب على مصراعيه لاكتشافات جديدة في فيزياء المادة.

➤ 1- تجميع/تكثيف جسيمات البوزون يحدث فقط في حال الجسيمات التي تحتفظ بعدد ثابت. هذا الشرط يجعل جسيمات الفوتون لا تتكثف حيث أن لها صفات التخليق والفناء.

➤ 2- عند الشرط $T < T_B$ نستطيع أن ننظر إلى النظام على أنه مزيج من حالتين (طورين) وهما:

أ- حالة غازية تتكون من N_e من الجسيمات والتي تتوزع على المستويات المثارة حيث $\varepsilon \neq 0$

ب- حالة تكثيف تتكون من N_0 من الجسيمات والتي تتجمع في المستوى الأرضي حيث $\varepsilon = 0$

➤ 3- نجد أن الطول الموجي عند $T < T_B$ يعرف من المعادلة

$$N = \frac{V}{\lambda_B^3} \times 2.612 \Rightarrow \lambda_B^3 = \frac{2.612}{\rho}, \rho = \frac{N}{V} \quad (7)$$

ولهذا فإن الطول الموجي مرتبط بمتوسط المسافة بين الجسيمات، ولذلك يظهر التداخل بين الدوال الموجية. لذا تتضح أهمية التأثير الكمي.

➤ 4- بالطبع فإن جسيمات البوزون المستقرة بالمستوى الأرضي لا تساهم بالطاقة الداخلية أو الحرارة النوعية للنظام. ولذلك نجد عندما

تكون $T < T_B$ فإن عدد جسيمات البوزون المستقرة بالمستوى الأرضي يصبح كبيراً جداً، ولكن طاقة المستوى $\varepsilon = 0$ ، أما في

الحالة $T > T_B$ فإن $N_0 = 0$ في أية حال.

3 - خواص غاز البوزون المثالي عند درجات الحرارة المختلفة

The Properties of Ideal Bose-Einstein Gas

من توزيع بوز-أينشتين الأكثر احتمالاً:

$$f(\epsilon_i) = \frac{1}{e^{-\beta\mu + \beta\epsilon_i} - 1} \quad (1)$$

نستطيع حساب خواص غاز البوزون المثالي التالية:

1- حساب الطاقة الداخلية

عند درجات الحرارة المرتفعة $T > T_B$ نجد أن قانون ديولنج-بيتي يعطي:

$$U_+ \rightarrow \frac{3}{2} N k_B T \quad (2)$$

وعند درجات الحرارة المنخفضة $T < T_B$ نجد أن:

$$U_- = N \varepsilon = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (3)$$

وبالقرب من المستوى الأرضي نضع $\mu = 0$ وباستخدام التعويض $x = \varepsilon/k_B T$ نحصل على:

$$U_- = \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} V \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} \quad (4)$$

$$V = \frac{1}{2.612} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T_B} \right)^{3/2}$$

ومن المعادلة (II.5) نجد أن:

وبالتعويض منها بالمعادلة (4) نحصل على:

$$U_- = 0.77 N k_B T \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (5)$$

وهذا يدل على أن الطاقة الداخلية تتغير كما $T^{5/2}$ عند الدرجات المنخفضة.

2- حساب الحرارة النوعية

عند درجات الحرارة المرتفعة $T > T_B$ نجد أن الحرارة النوعية تأخذ القيمة الكلاسيكية:

$$C_{V+} = \left(\frac{\partial U_+}{\partial T} \right)_V \approx \frac{3}{2} N k_B \quad (6)$$

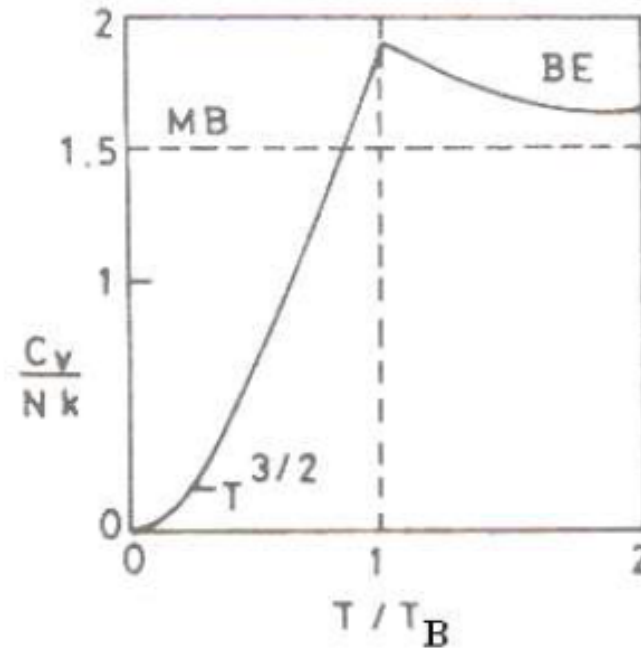
وعند درجات الحرارة المنخفضة $T < T_B$ نجد أن:

$$C_{V-} = \left(\frac{\partial U_-}{\partial T} \right)_V \approx 1.92 N k_B \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (7)$$

ويظهر سلوك الحرارة النوعية مع درجة الحرارة بالشكل (4). فعند درجات الحرارة المنخفضة يبدأ المنحنى في الازدياد من القيمة صفر عند الصفر المطلق حتى يصل إلى قيمة عظمى، وهي $1.92 N k_B$ وذلك عندما تتساوى درجة الحرارة مع الدرجة الحرجة، $T_B = T$

وبعدها يبدأ ميل المنحنى في التغير مع ارتفاع درجة الحرارة، وعند درجات الحرارة العليا تأخذ الحرارة النوعية القيمة الكلاسيكية وهي $1.5 N k_B$.

كما يتضح من الشكل التالي.



شكل (٤) تغير الحرارة النوعية تحت حجم ثابت
مع درجة الحرارة. BE يرمز إلى إحصاء بوز
- أينشتين و MB يرمز إلى إحصاء ماكسويل
- بولتزمان.

3- حساب الإنتروبي

القيمة المطلقة للإنتروبي عند درجات الحرارة المنخفضة تحسب من قانون الحرارة النوعية كالاتي:

$$S = \int_0^T \frac{C_{V-}}{T'} dT' = 1.28 N k_B \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (8)$$

ونجد أن الإنتروبي يؤول للصفر عند $T = 0$ ، كما هو معرف بالقانون الثالث للديناميكا الحرارية.

4- حساب دالة هلمهولتز

تحسب دالة هلمهولتز عند الشرط $T < T_B$ كالتالي:

$$F = U - TS = 0.51 N k_B \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} = -1.33 k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} V \quad (9)$$

5- حساب الضغط

من المعادلة (9) نستطيع أن نحسب الضغط بالعلاقة:

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = 1.33 k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \quad (10)$$

ومن المعادلة (10) نجد أن الضغط يتناسب مع $T^{5/2}$ عند درجات الحرارة المنخفضة، ولا يعتمد على الحجم. وعند الصفر المطلق نجد أن جميع جسيمات البوزون تحتل المستوى الأرضي $\varepsilon = 0$ ، ولا يكون لها كمية حركة خطية، وبالتالي ليس لها أي مساهمة في الضغط.

واجب منزلي:

اثبت أن الضغط لغاز البوزون يعطي بالعلاقة: $P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$ وهي شبيهة بمعادلة الغاز المثالي.

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل الثامن: دالة التجميع للجزيئات ثنائية الذرات

Statistical Mechanics OF Diatomic Gases

دالة التجميع للجزيئات ثنائية الذرات

نحن نعلم أن الغازات المثالية أحادية الذرات لها ثلاث درجات حرية مرتبطة بالحركة الانتقالية. ومنها، ومن قانون التوزيع المتساوي للطاقة على درجات الحرية، وجد أن متوسط الطاقة الحركية لمول واحد تعطي بالعلاقة:

$$u = \frac{3}{2}RT \quad (1)$$

والحرارة النوعية تعطى بالعلاقة:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \frac{3}{2}R \quad (2)$$

ولحساب الكميات الفيزيائية السابقة للجزيئات، يجب أن نعرف طبيعة القوى التي أدت إلى تكوين الجزيئات من الذرات المنفصلة. وكما نعلم أن الجزيئات مركبات ثابتة (مستقرة) تتكون من ذرتين أو أكثر، وقد تم التعامل معها عن طريق نظرية الكم. وقد وجد أن الطاقة الكلية للجزء ناتجة من مجموع الطاقات التالية:

- طاقة حركة انتقالية E_{trans} (Translation kinetic energy) لمركز ثقل الجزيء.
- طاقة الإثارة E_{excit} (Excitation energy) لإليكترونات ذرات الجزيء.
- الطاقة الاهتزازية (التذبذبية) E_{vib} (Vibrational energy) لأنوية الجزيء على طول المحور الممتد بينهما.
- طاقة الحركة الدورانية E_{rot} (Rotational energy) للذرات حول مركز ثقل النواة.

ولهذا فإن الطاقة الكلية تكون على الشكل:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{excit}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}} \quad (3)$$

وتصبح دالة التجميع الكلية للجزيء على الصورة:

$$Z_{sp} = \sum e^{-\beta E_{\text{total}}}$$

$$Z_{sp} = \left(\sum e^{-\beta E_{\text{trans}}} \right) \left(\sum e^{-\beta E_{\text{excit}}} \right) \left(\sum e^{-\beta E_{\text{rot}}} \right) \left(\sum e^{-\beta E_{\text{vib}}} \right)$$

$$Z_{sp} = Z_{\text{trans}} Z_{\text{excit}} Z_{\text{rot}} Z_{\text{vib}} \quad (4)$$

وتتحول المسألة إلى حساب دالة التجميع لكل نمط من أنماط الطاقة على حدة، مع ملاحظة أن الطاقات الداخلية كلها، ماعدا طاقة الحركة الانتقالية، هي طاقات مكتملة وغير متصلة.

ولتبسيط حساب دالة التجميع الفردية سوف نقترح الفروض التالية:

1. سنفترض أن الحركات الداخلية (إلكترونية، اهتزازية، دورانية) حركات مستقلة، بمعنى أنها لا تؤثر على بعضها البعض.

2. انعدام تأثير الحركة الاهتزازية على طبيعة الحركة الدورانية ولذا فإن عزم القصور للجزيء سوف يعتبر كمية ثابتة.

3. فرق الطاقة في الانتقالات الإلكترونية المثارة يتطلب درجات حرارة مرتفعة،

$$\Delta E_{\text{excit}} \approx 1 \text{ eV} \approx 10^4 \text{ K}$$

بالتالي يمكن إهماله. وذلك مقارنة بدرجة حرارة الغرفة

$$T = 300 \text{ K}$$

والتي تكافئ

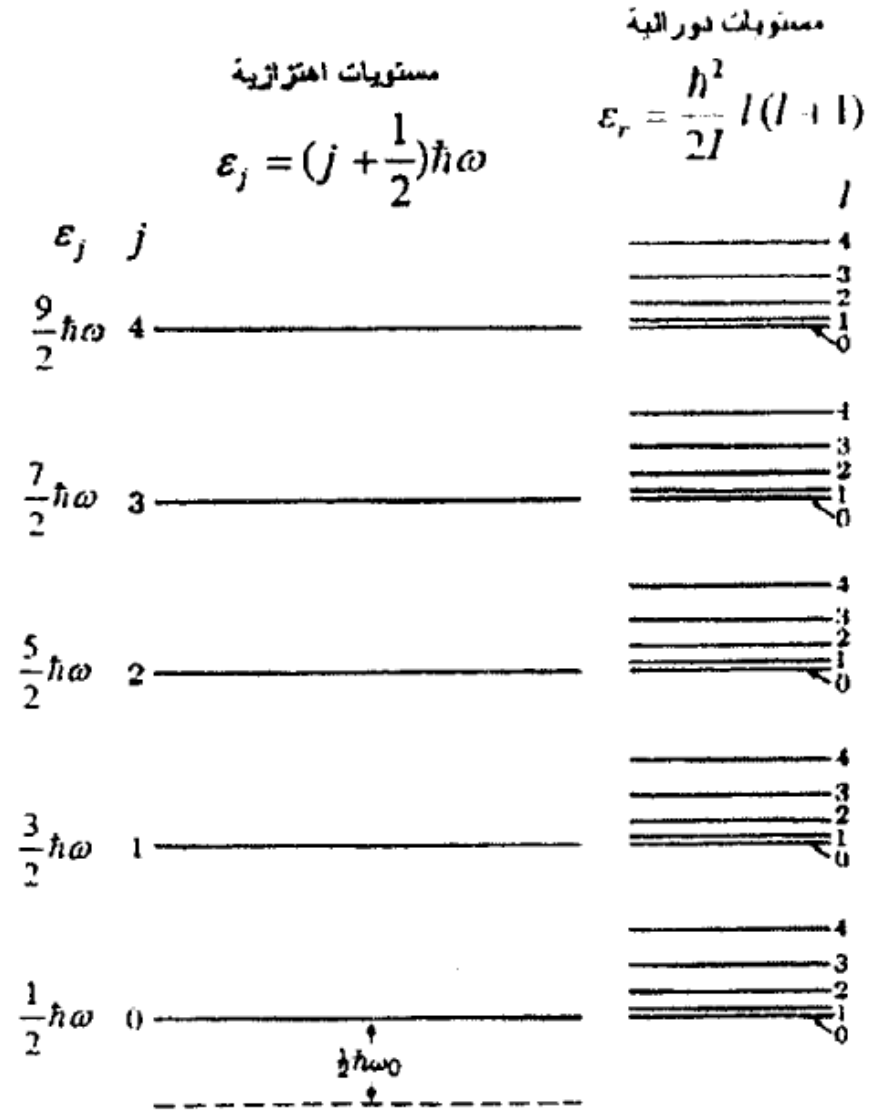
$$0.03 \text{ eV}$$

4. وحيث أنه وجد عملياً أن فرق الطاقات في النمط الاهتزازي والدوراني تقريباً هو :

$$\Delta E_{\text{vib}} \approx 10^{-4} \text{ eV}, \Delta E_{\text{rot}} \approx 10^{-3} \text{ eV to } 10^{-4} \text{ eV}$$

ولذلك فإنه من السهل أن نجد أعداد لا بأس بها من المستويات الاهتزازية والدورانية في درجة حرارة الغرفة، كما

هو بالشكل (1)



(شكل 1) مستويات الطاقة للنمط الاهتزازي والدوراني للجزيئات ثنائية الذرات

1. النمط الاهتزازي (Vibrational mode)

يكتب الهملتونيان للمتذبذب التوافقي البسيط ذو الكتلة m والتردد الزاوي $\omega = 2\pi f$ ، على الصورة:

$$H(p_x, x) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1)$$

حيث:

p_x : هي كمية الحركة الخطية باتجاه المحور X

x : هي الإزاحة عن وضع الاتزان. وباستخدام ميكانيكا الكم وجد أن مستويات طاقته الاهتزازية المميزة هي:

$$\epsilon_j = \left(j + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

من المعادلة (2) والشكل (1) نجد الملاحظات التالية:

1- الفرق بين مستويات الطاقة المتتالية متساوي وهو: $\epsilon_{j\pm 1} - \epsilon_j = \pm \hbar \omega$

2- طاقة المستوى الأرضي هي: $\frac{\hbar \omega}{2}$ ، وتسمى طاقة الصفر.

3- مستويات الطاقة وحيدة الانتماء، بمعنى أن: $g_j = 1$ لكل قيم j

4- ودالة التجميع الفردية تحسب كالتالي:

$$Z_{vib} = \sum_j e^{-\beta \epsilon_j} = \sum_j e^{-\beta(j+\frac{1}{2})\hbar\omega} = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} (e^0 + e^{-\beta\hbar\omega} + e^{-2\beta\hbar\omega} + \dots)$$

$$Z_{vib} = e^{-\frac{1}{2}a} (e^0 + e^{-a} + e^{-2a} + \dots)$$

$$Z_{vib} = e^{-\frac{1}{2}a} \frac{1}{1 - e^{-a}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}a} - e^{-\frac{1}{2}a}} = \frac{1}{2 \sinh(a/2)} \quad (3)$$

حيث:

$$a = \frac{\hbar\omega}{k_B T} = \frac{\theta_{vib}}{T} \quad (4) \quad , \quad \theta_{vib} = \frac{\hbar\omega}{k_B}$$

5- ولحساب الطاقة الداخلية نجد أنه من المعادلة (3):

$$U_{vib} = -\frac{N}{Z_{vib}} \left(\frac{\partial \ln Z_{vib}}{\partial \beta} \right)_{V,N} = -N \left(\frac{\partial \ln \left(\frac{1}{2 \sinh(a/2)} \right)}{\partial \beta} \right)_{V,N}$$

$$U_{vib} = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \right] \quad (5)$$

$$a \gg 1 \Rightarrow U_{vib} = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^a - 1} \right] \approx N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + e^{-a} \right]$$

وعند درجات الحرارة المنخفضة، نجد:

$$U_{vib} \approx \frac{1}{2} N\hbar\omega \quad (6)$$

$$a \ll 1 \Rightarrow U_{vib} = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \right]$$

وعند درجات الحرارة المرتفعة، نجد:

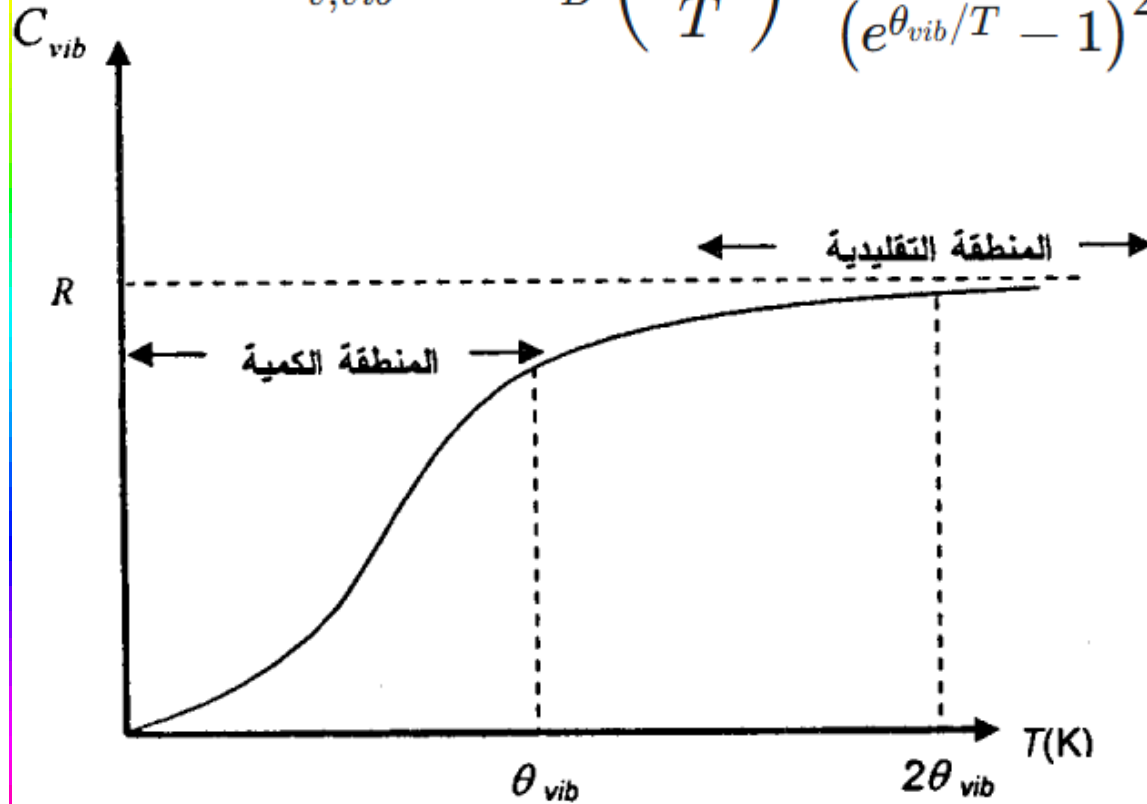
$$U_{vib} \approx Nk_B T \quad (7)$$

وهي النتيجة التقليدية المشهورة. وبالتالي، فعند درجات الحرارة المرتفعة نجد أن المستويات المثارة العليا هي الممتلئة ومن ثم فإن استخدام ميكانيكا الكم يصبح غير منطقي عندما تكون: $k_B T \gg \hbar\omega$

6- ونحسب الحرارة النوعية من المعادلة (5) كالتالي:

$$C_{v,vib} = \left(\frac{\partial U_{vib}}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$C_{v,vib} = Nk_B \left(\frac{\theta_{vib}}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_{vib}/T}}{(e^{\theta_{vib}/T} - 1)^2} \quad (8)$$



الشكل (2) يعبر عن تغير الحرارة النوعية C_{vib} مقابل درجة الحرارة المطلقة في النمط الاهتزازي). كما يتضح من الشكل أن في المنطقة التقليدية تكون الحرارة النوعية ثابتة، وتساوي R ، وتقل أسياً حتى تصل إلى الصفر عندما تؤول T إلى الصفر المطلق.

الشكل (2) تغير الحرارة النوعية مقابل درجة الحرارة المطلقة

مثال: احسب الحرارة النوعية الاهتزازية $C_{v,vib}$

الحل:

$$\theta_{vib} = \frac{\hbar\omega}{k_B} = \frac{0.29 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}} \approx 3362 \text{ K}$$

$$1000 \text{ K} \Rightarrow \theta_{vib} = 3362 \text{ K} \Rightarrow x = \frac{\theta_{vib}}{T} = \frac{3362}{1000} \approx 3.362$$

$$C_{v,vib} = R \left(\frac{\theta_{vib}}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_{vib}/T}}{(e^{\theta_{vib}/T} - 1)^2}$$

$$C_{v,vib} = 8.31 \times (3.362)^2 \frac{e^{3.362}}{(e^{3.362} - 1)^2} \approx 3.49 \text{ J} \cdot \text{mole}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

وهي متفقة مع القيمة العملية، ولكنها صغيرة مقارنة بالقيمة التقليدية: $C_{v,vib} = R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

II- النمط الدوراني (Rotational mode)

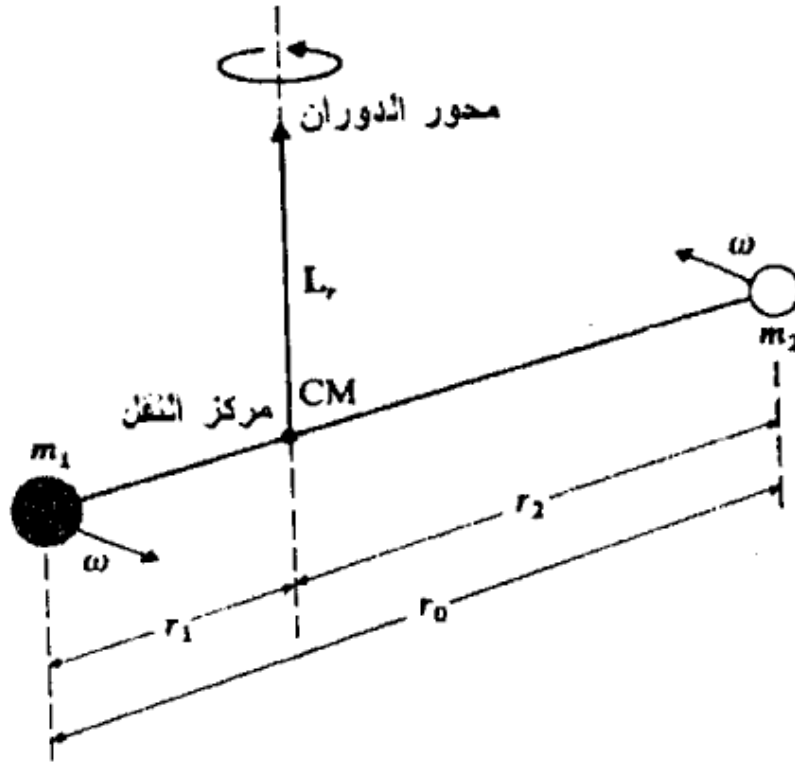
$$\text{K.E.} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I} \quad (1)$$

تعرف طاقة الحركة الدورانية تقليدياً بالعلاقة:

ونجد أن عزم القصور الذاتي حول محور مار
بمركز ثقل الجزيء الثنائي هو:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = \mu r_e^2 \quad (2)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{الكتلة المختزلة}$$



(الشكل 3) الحركة الدورانية للجزيء ثنائي الذرات حول محور يمر بمركز ثقلهما

وتبعاً لقوانين ميكانيكا الكم فإن طاقة المستويات الدورانية تعرف بالعلاقة:

$$\epsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

حيث l عدد كمي يحدد كمية الحركة المدارية بالنسبة إلى مركز ثقل الجزيء، ولها التعددية $g_l = (2l+1)$

وعند تغير الحالات الكمية الدورانية، يتبع العدد قاعدة الانتقال: $\Delta l = \pm 1$

ولهذا النمط الدوراني فإن دالة التجميع الدورانية تحسب كالتالي:

$$Z_{rot} = \sum_l g_l e^{-\beta \epsilon_l}$$

$$Z_{rot} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-\frac{\hbar^2}{2Ik_B T} l(l+1)} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-l(l+1)\theta_{rot}/T} \quad (4)$$

$$\theta_{rot} = \frac{\hbar^2}{2Ik_B} \text{ حيث استخدمنا}$$

والجدول التالي يعرض قيم θ_{rot} , θ_{vib} لبعض الجزيئات المهمة.

θ_{rot} (K)	θ_{vib} (K)	جزيء
85.4	6140	الهيدروجين H_2
2.1	2260	الأكسجين O_2
2.9	3352	النيتروجين N_2
0.0347	810	الكلور Cl_2

ونظراً لصعوبة حساب صيغة التجميع في المعادلة (4)، لهذا فسوف ندرسها تقريبياً في حالتين وهما:

i- درجات الحرارة المنخفضة $T \ll \theta_{rot}$

مع وجود الشرط

$$l \ll \sqrt{\frac{2Ik_BT}{\hbar^2}} \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2I} \gg k_BT \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2Ik_BT} \gg 1$$

وعند درجات الحرارة المنخفضة، منطقة ميكانيكا الكم، نجد أن أعداد قليلة من المستويات الدورانية الأولية تصبح مهمة ولهذا سنكتفي بالحدين الأولين من التجميع، وتصبح دالة التجميع $Z_{rot,Q}$ ، حيث الرمز Q يدل على منطقة ميكانيكا الكم، بالصورة:

$$Z_{rot,Q} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{-l(l+1)\theta_{rot}/T}$$

$$Z_{rot,Q} \approx 1 + 3e^{-2\theta_{rot}/T} + 5e^{-6\theta_{rot}/T} \quad (5)$$

ومنها نجد أن الطاقة الداخلية:

$$U_{rot,Q} = \frac{1}{Z_{rot,Q}} \frac{\partial Z_{rot,Q}}{\partial \beta} \times (-1) \frac{1}{k_B} = \frac{1}{Z_{rot,Q}} \frac{\partial Z_{rot,Q}}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

$$U_{rot,Q} = \frac{1}{1 + 3e^{-2\theta_{rot}/T}} \times \left(-\frac{3\hbar^2}{I} e^{-2\hbar^2/Ik_BT} \right)$$

$$U_{rot,Q} = \frac{3\hbar^2}{I} \frac{e^{-\hbar^2/Ik_BT}}{1 + 3e^{-\hbar^2/Ik_BT}}$$

$$U_{rot,Q} \approx 6Nk_B\theta_{rot}e^{-2\theta_{rot}/T} \quad (6)$$

والحرارة النوعية تحت حجم ثابت هي:

$$C_{v,rot,Q} = \left(\frac{\partial U_{rot,Q}}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$C_{v,rot,Q} \approx 3Nk_B \left(\frac{\hbar^2}{Ik_B T} \right)^2 \left(2 \frac{\theta_{rot}}{T} \right) e^{-2\theta_{rot}/T}$$

$$C_{v,rot,Q} \approx 3Nk_B \left(2 \frac{\theta_{rot}}{T} \right)^2 e^{-2\theta_{rot}/T} \quad (7)$$

ii- درجات الحرارة المرتفعة $T \gg \theta_{rot}$

$$\text{مع وجود الشرط} \quad \frac{\hbar^2}{2Ik_B T} \ll 1 \quad \Longleftarrow \quad \frac{\hbar^2}{2I} \ll k_B T \quad \Longleftarrow \quad l \gg 1$$

لذلك فإنه عند درجات الحرارة المرتفعة نجد أن أعداد كبيرة من المستويات الدورانية تصبح مهمة. ولهذا سوف نستعيض عن التجميع بالمعادلة (4) بالتكامل. ولهذا تأخذ دالة التجميع الفردية $Z_{rot,C}$

$$Z_{rot,C} = \int_0^{\infty} (2l + 1) e^{-l(l+1)\theta_{rot}/T} dl \quad (8)$$

والرمز C يدل على المنطقة التقليدية. وباستخدام التعويض التالي:

$$x = l(l + 1) \implies dx = (2l + 1)dl$$

نجد أن المعادلة (8) تؤول إلى:

$$Z_{rot,C} = \int_0^{\infty} e^{-x\theta_{rot}/T} dx = \left[-\frac{T}{\theta_{rot}} e^{-x\theta_{rot}/T} \right]_0^{\infty}$$

$$Z_{rot,C} = \frac{T}{\theta_{rot}} = \frac{2Ik_BT}{\hbar^2} \quad (8.a)$$

ومن (8.a) نجد أن:

$$U_{rot,C} = Nk_BT^2 \frac{\partial \ln(Z_{rot,C})}{\partial T} = Nk_BT^2 \frac{1}{T} = Nk_BT \quad (9)$$

$$C_{v,rot,C} = \frac{\partial U_{rot,C}}{\partial T} = Nk_B = R \quad (10)$$

وهي النتيجة التقليدية المشهورة.

وقبل أن نختم الحديث عن هذا الموضوع نود أن ننوه أن دالة التجميع الدورانية يجب أن تقسم على معامل خاص

بتمائل الجزيئات، وهو المعامل σ ، ويسمى عدد التماثل (Symmetry number) وللجزيئات متجانسة النواة

(Homonuclear) مثل $H_2, O_2, N_2, \dots$ نجد أن $\sigma=2$ وللجزيئات مختلفة النواة مثل $HCl, CO, \dots$ فإن $\sigma=1$

$$Z_{rot} = \frac{Z_{rot,C}}{\sigma} \quad (11)$$

يصبح الشكل النهائي لدالة التجميع على الصورة:

$$Z_{rot} = \frac{Z_{rot,Q}}{\sigma} \quad (12)$$

مثال: احسب θ_{rot} لجزئ النيتروجين N_2 إذا علم أن: $r_e = 1.0976 \times 10^{-10} \text{ m}$

الحل:

نعلم أن كتلة جزئ النيتروجين N_2

$$m = \frac{14.008}{6.023 \times 10^{26}} \approx 2.325 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

$$\mu = m/2 = 1.163 \times 10^{-26} \text{ kg} \quad \text{ومنها نجد أن:}$$

$$I = \mu r_e^2 = 1.163 \times 10^{-26} \text{ kg} \times (1.0976 \times 10^{-10} \text{ m})^2 \approx 14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\theta_{rot} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 I k_B}$$

بالتالي فإن:

$$\theta_{rot} = \frac{(6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8\pi^2 \times 14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/molecule} \cdot \text{K}} \approx 2.88 \text{ K}$$

مثال: احسب دالة التجميع، تقليدياً وكمياً، لجزيء الهيدروجين H_2 عند درجة الحرارة $T=300\text{ K}$

إذا علم أن: $I=6.29 \times 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

الحل:

أولا يجب أن نحسب θ_{rot} لنستطيع أن نقرر ما إذا كانت درجة الحرارة في المنطقة الكمية أو المنطقة التقليدية، لذلك:

$$\theta_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{8\pi^2 I k_B} = \frac{(6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8\pi^2 \times 6.29 \times 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \times 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/molecule} \cdot \text{K}} \approx 64.03 \text{ K}$$

ومنها نجد أن دالة التجميع التقليدية هي:

$$Z_{\text{rot},C} = \frac{T}{\sigma \theta_{\text{rot}}} = \frac{300}{2 \times 64.03} \approx 2.34$$

$$Z_{\text{rot},C} = \frac{T}{\theta_{\text{rot}}} = \frac{300}{64.03} \approx 4.69 \Rightarrow H_2 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow Z_{\text{rot},C} = \frac{4.69}{2} \approx 2.34$$

$$Z_{\text{rot},C} = \frac{T}{\theta_{\text{rot}}} = \frac{300}{64.03} \approx 4.69$$

وباستخدام صيغة الجمع نجد أن:

$$Z_{rot,Q} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) e^{-l(l+1)\theta_{rot}/T}$$

$$Z_{rot,Q} = 1.000 + 3e^{-2 \times 64.03/300} + 5e^{-6 \times 64.03/300} + \dots$$

$$Z_{rot,Q} = 1.000 + 1.958 + 1.389 + 0.540 + 0.126 + \dots \approx 5.001$$

ولنا هنا بعض الملاحظات التالية على النتيجة السابقتين:

- I. مساهمة كل حد من قيم l في التجميع لها قيمة قصوى عند $l=1$ وبعد ذلك تتناقص بسرعة مع زيادة l
- II. التناقص في قيم الحدود العليا ناتج عن المعامل $e^{\frac{-l(l+1)\theta_{rot}}{T}}$ بالدليل (الأس)
- III. الفرق بين القيمة التقليدية والقيمة الكمية ناتج من استخدامنا للتكامل بدلاً من التجميع وهذا يعني أن النسبة:

$$\frac{\theta_{rot}}{T} = \frac{64.03}{300} \approx 0.21$$

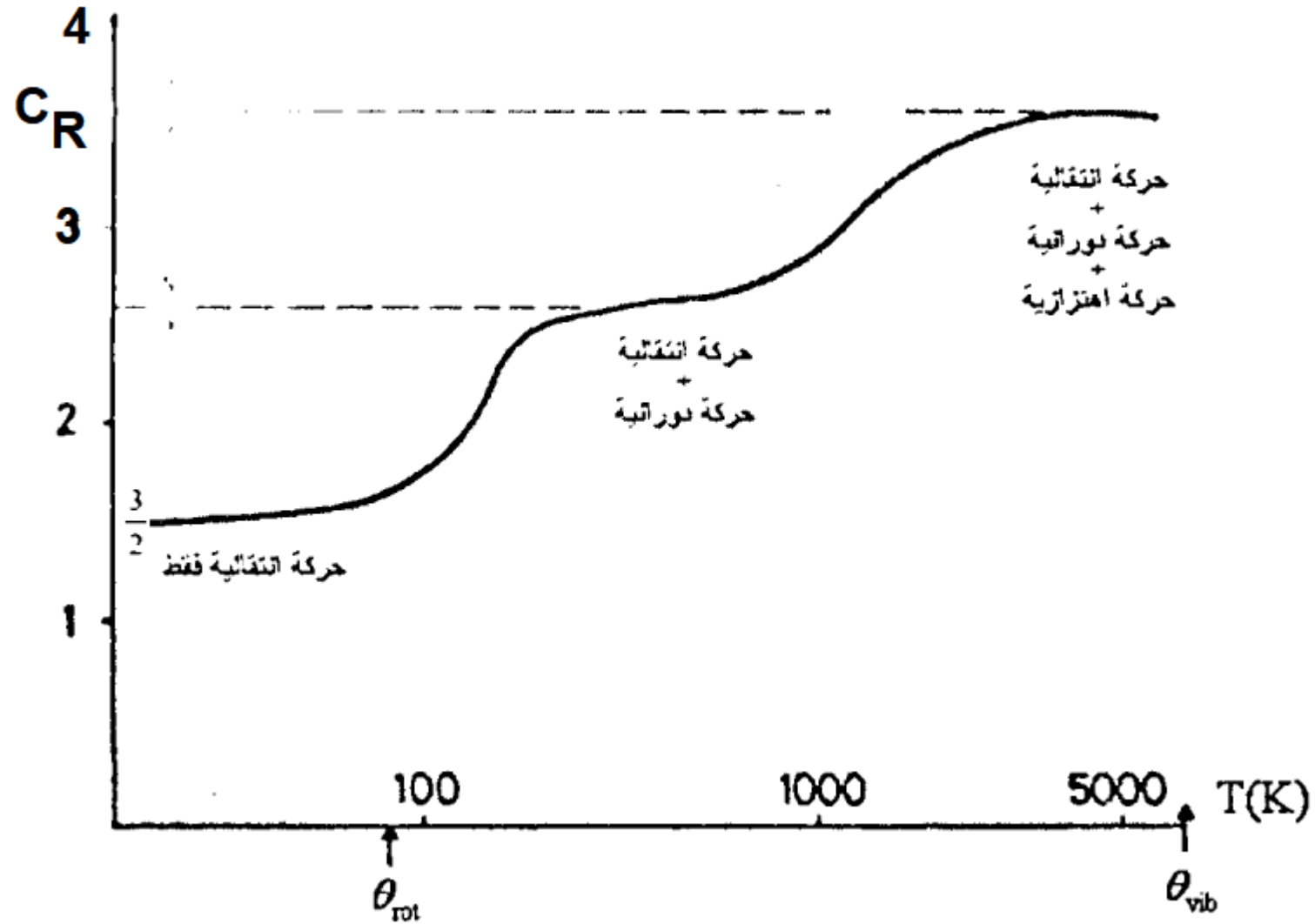
ما زالت لها قيمة محسوسة ومؤثرة في الحسابات.

والحرارة النوعية الكلية تكتب على الصورة:

$$C_V = C_{v,trans} + C_{v,rot} + C_{v,vib}$$

$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B + Nk_B + Nk_B \left(\frac{\theta_{vib}}{T} \right)^2 \frac{e^{\theta_{vib}/T}}{(e^{\theta_{vib}/T} - 1)^2}$$

وعند درجة حرارة الغرفة نجد أن فرق الطاقة بين مستويات الطاقة الدورانية لمعظم الجزيئات ثنائية الذرة أصغر بكثير من $k_B T$ ، ولكن فرق الطاقة بين مستويات الطاقة الاهتزازية أكبر بكثير من $k_B T$



(شكل 4) تغير الحرارة النوعية مع درجة الحرارة المطلقة لأنماط المختلفة للجزيئات ثنائية الذرات.

Kingdom of Saudi Arabia

Ministry of Education

Qassim University

College of Science

Department of Physics



المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

جامعة القصيم

كلية العلوم

قسم الفيزياء

الفيزياء الاحصائية (PHYS 342)

الفصل التاسع: إحصاء المواد المغناطيسية

مقدمة:

ترجع أهمية المواد المغناطيسية الى استخدامها في جميع الأجهزة الكهربائية القديمة والحديثة، مثل ذاكرة الكمبيوتر والدوائر المنطقية التي تعتمد على مفاتيح الفتح والفصل المغناطيسية.

ولهذا أصبح من الأهمية دراسة خواص المواد المغناطيسية من الناحية التجريبية والنظرية.

يمكن تصنيف حالة المواد من حيث الصفات المغناطيسية الى الحالات التالية:

- 1) بارامغناطيسية
- 2) دايامغناطيسية
- 3) فيرومغناطيسية
- 4) فيريمغناطيسية
- 5) مواد مضادة للفيرومغناطيسية

وفي تصنيف حالة المواد من ناحية خواصها المغناطيسية نود أن نوضح أن النظرية التقليدية تنسب جميع المجالات المغناطيسية للمواد إلى حركة شحناتها الكهربائية. بالمقياس الذري، فإن الذرات المنفصلة ينشأ عنها مجالات مغناطيسية حينما تمتلك الكتروناتها عزم مغناطيسي μ ، يسمى عزم ثنائي القطب، ناتج من كمية حركتهم الدورانية μ_1 أو المغزلية μ_2 أو الاثنين معا $(\mu_1 + \mu_2)$ والعزوم المغناطيسية الناتجة عن الحركتين المدارية والمغزلية للإلكترونات يلغي بعضها البعض في أغلب الذرات. وإذا لم يكن التلاشي في العزوم تاما فإن المادة عندئذ تسمى بارامغناطيسية.

وسوف نتعامل هنا ونفسر الظواهر المرتبطة بالمواد البارامغناطيسية فقط مثل الألمنيوم والتيتانيوم، وهي المواد التي تنجذب للمناطق القوية في المجال المغناطيسي. ونبدأ هنا ببعض التعريفات التي نجدها عندما نتعامل مع المواد المغناطيسية وأولها:

التمغنط (Magnetization M):

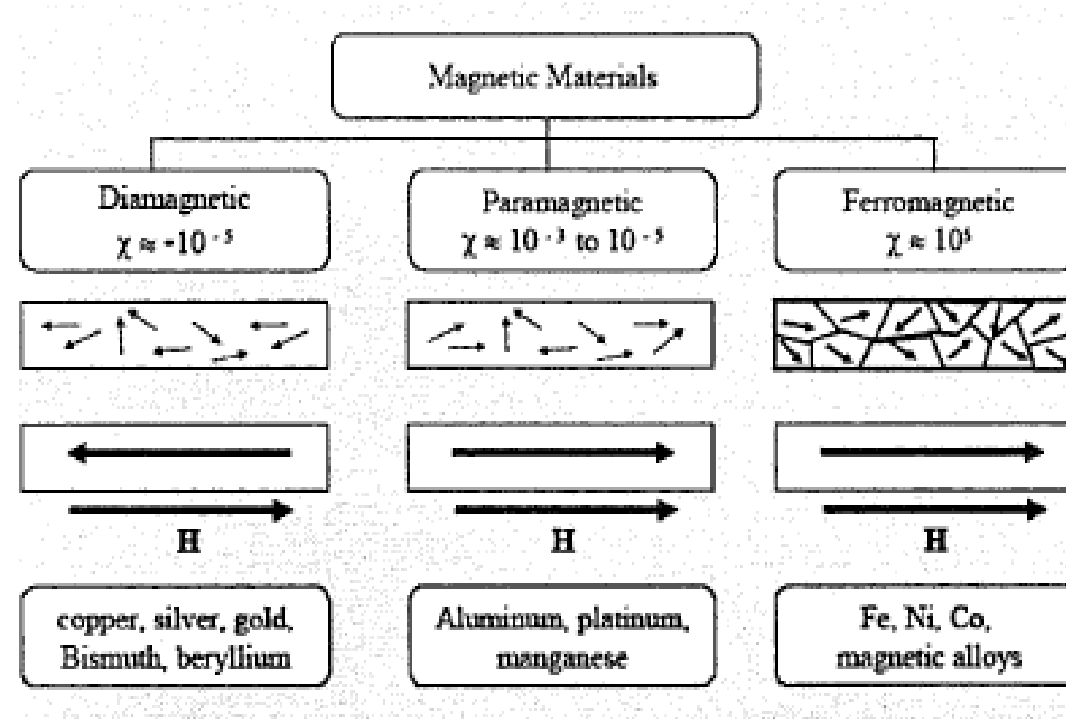
هو العزم المغناطيسي لوحدة الحجم من المادة الممغنطة عند نقطة ما. فإذا تواجد عدد $n = \frac{N}{V}$ من الذرات لوحدة الحجم تمتلك كل منها عزماً ثنائياً مغناطيسياً μ باتجاه ما، فإن:

$$M = n\mu$$

وعادة تقاس الخواص المغناطيسية للمادة بمدى تأثيرها بالمجال المغناطيسي الخارجي وتسمى هذه الخاصية بالقابلية المغناطيسية (magnetic susceptibility χ) لوحدة الحجم وتعريفها هو:

$$\chi = \frac{M}{H}$$

حيث H هو الشدة المغناطيسية الخارجية. وقد وجد عند درجات الحرارة المرتفعة أن $\chi \propto \frac{1}{T}$ حيث T هي درجات الحرارة المطلقة وتعرف هذه العلاقة بقانون كوري. والشكل (1) يظهر ثلاث أنواع من المواد المغناطيسية المهمة وخواصها ومدى تأثرها بالمجال المغناطيسي الخارجي.

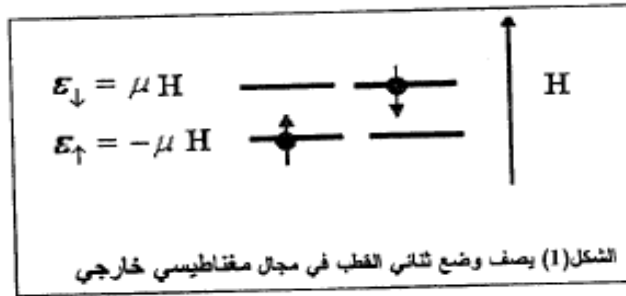


شكل (1) ملخص للصفات المغناطيسية لبعض المواد.

1. الوصف النوعي للتمغنط (qualitative description of magnetization)

عند التأثير بمجال مغناطيسي خارجي H ، كما بالشكل 1، علي الذرات ذات العزم المغناطيسي ثنائي القطب μ (μ موجب) فإن العزوم المغناطيسية μ تترتب إما موازية لاتجاه المجال $\mu_{\uparrow}$ ، ولها الطاقة المغناطيسية $\epsilon_{\uparrow} = \mu_{\uparrow} \cdot H = -\mu \cdot H$ أو عكس اتجاه المجال $\mu_{\downarrow}$ ، ولها الطاقة المغناطيسية $\epsilon_{\downarrow} = \mu_{\downarrow} \cdot H = \mu \cdot H$.

ويمكن تلخيص ذلك بالجدول التالي:



المستوي	الشرط	الطاقة المغناطيسية	احتمالية التوزيع
($\uparrow$)	$\mu \uparrow H \uparrow$	$\epsilon_{\uparrow} = -\mu H$	$P_{\uparrow} = C e^{\beta \mu H}$
($\downarrow$)	$\mu \downarrow H \uparrow$	$\epsilon_{\downarrow} = \mu H$	$P_{\downarrow} = C e^{-\beta \mu H}$

حيث يوضح الجدول وضع مستوي ثنائي القطب بالنسبة للمجال الخارجي، وطاقة المستوي واحتمالية تواجد ثنائي القطب بالمستويات باستخدام توزيع ماكسويل-بولتزمان التقليدي.

ونستطيع أن نلخص الجدول السابق كالتالي:

1. $\epsilon_{\uparrow}$ هي طاقة المستوي الأدنى والتي تكون فيها احتمال وجود الذرات هو المفضل.
2. $\epsilon_{\downarrow}$ هي طاقة المستوي الأعلى والتي يكون فيها احتمال وجود الذرات هو الأقل تفضيلاً.

2. الوصف الكمي للتمغنط (quantitative description of magnetization)

ولحساب الصفات المغناطيسية للمواد دعونا نعرف النسبة η بالصيغة التالية:

$$\eta = \beta\mu H = \frac{\mu H}{k_B T} = \frac{(\text{magnetic})\text{potential energy}}{(\text{thermal})\text{translation energy}}$$

وهي نسبة عديمة الوحدات حيث أنها تقيس النسبة بين طاقتين: الأولى هي الطاقة المغناطيسية (μH) المسئولة عن محاذاة العزم المغناطيسي مع المجال الخارجي، والثانية هي الطاقة الحرارية ($k_B T$) المسئولة عن توجيه العزم المنفرد بشكل عشوائي.

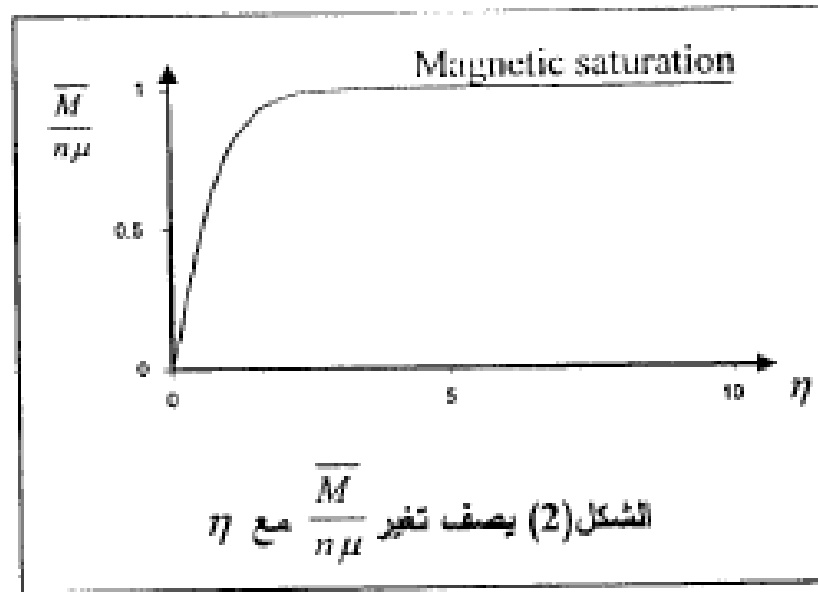
ومن η نستطيع أن نحسب القيمة المتوسطة للعزم المغناطيسي $\bar{\mu}_H$ الناتج من المجال الخارجي بواسطة المعادلة:

$$\bar{\mu}_H = \frac{\mu_{\uparrow} P_{\uparrow\uparrow} + \mu_{\downarrow} P_{\downarrow}}{P_{\downarrow} + P_{\uparrow}} = \frac{\mu P_{\uparrow} + (-\mu) P_{\downarrow}}{P_{\downarrow} + P_{\uparrow}} = \mu \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}} = \mu \tanh \eta = \mu \times \begin{cases} \eta & \text{for } \eta \ll 1 \\ 1 & \text{for } \eta \gg 1 \end{cases}$$

بالتالي فإن القيمة المتوسطة للتمغنط $\bar{M}$ باتجاه H هي:

$$\bar{M} = n\bar{\mu}_H = \begin{cases} n\mu\eta = \chi H & \text{for } \eta \ll 1 \\ n\mu & \text{for } \eta \gg 1 \end{cases} \quad (2)$$

حيث الرمز $n = \frac{N}{V}$ يدل علي عدد العزوم المغناطيسية لوحدة الحجم. الشكل (2) يوضح تغير $\frac{\bar{M}}{n\mu}$ مع η ومن الشكل يتضح أن:



1. عند درجات الحرارة المنخفضة ($T \ll 1$ و $\eta \gg 1$) نجد أن $\bar{M}$ لا تعتمد علي H وتصل الي درجة التشبع المغناطيسي (magnetic saturation). ودرجة التشبع المغناطيسي تعني أن العزوم المغناطيسية تأخذ الاتجاه الموازي للمجال الخارجي، وهذا معناه أن النظام يوجد بحالة مرتبة (low disorder=order). ونجد أيضا أن العزوم كلها تصبح موازية للمجال، بمعنى أن $P_{\uparrow} = 1$ و $P_{\downarrow} = 0$ وهذا الوصف ينطبق أيضا علي المجالات الخارجية المرتفعة $H \gg 1$.

2. عند درجات الحرارة المرتفعة (وأیضا المجالات المنخفضة) نجد أن $\bar{M}$ تعتمد علي H ويصبح النظام بحالة غير مرتبة (high disorder) ولذلك نجد أن $P_{\downarrow} = P_{\uparrow}$

والمعادلة (2) تتفق مع الوصف التجريبي للمواد البارامغناطيسية، ومنه نجد أن:

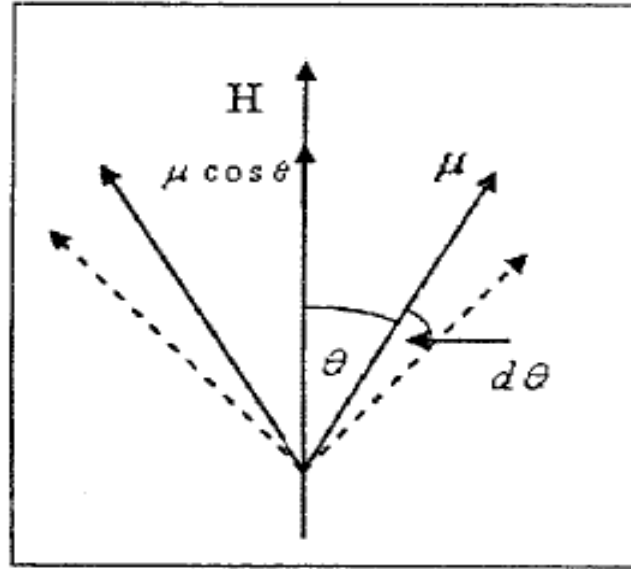
$$\chi = \frac{\bar{M}}{H} = \frac{n\mu^2}{k_B T} \quad (3)$$

القانون بالمعادلة (3) يعرف بأنه قانون كوري وقد تم التحقق منه عملياً.

3- نظرية لانجفن للمغناطيسية (Langevine's theory for magnetization)

تقليديا وحسب توزيع بولتزمان يكون عدد ثنائي القطب والذي يأخذ اتجاه المجال المغناطيسي الخارجي بزاوية تنحصر بين θ و $\theta + d\theta$ تعطي بالعلاقة التالية:

$$dn = ce^{-\beta\varepsilon} d\omega = ce^{\beta\mu H \cos\theta} d\omega = ce^{\beta\mu H \cos\theta} (2\pi \sin\theta d\theta) \quad (1)$$



شكل (3) اتجاه عزم ثنائي القطب μ في مجال مغناطيسي خارجي H .

حيث c هو ثابت التناسب و $d\omega$ عنصر الزاوية الفراغية المحصورة بين θ و $\theta + d\theta$ علي اتجاه المجال. وكما هو مبين بالشكل (3) يكون اسهام عزم ثنائي القطب في اتجاه المجال المغناطيسي هو $\mu \cos \theta$ لذلك فإن اسهام الذرات في عنصر الزاوية الفراغية يكون:

$$\mu \cos \theta dn = c e^{\beta \mu H \cos \theta} (\mu \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta \quad (2)$$

ومن ثم فإن الاسهام الكلي لثنائي القطب في اتجاه المجال سوف يكون:

$$c \int_0^{2\pi} e^{\beta \mu H \cos \theta} (\mu \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta \quad (3)$$

ومنه نجد أن المغناطيسية:

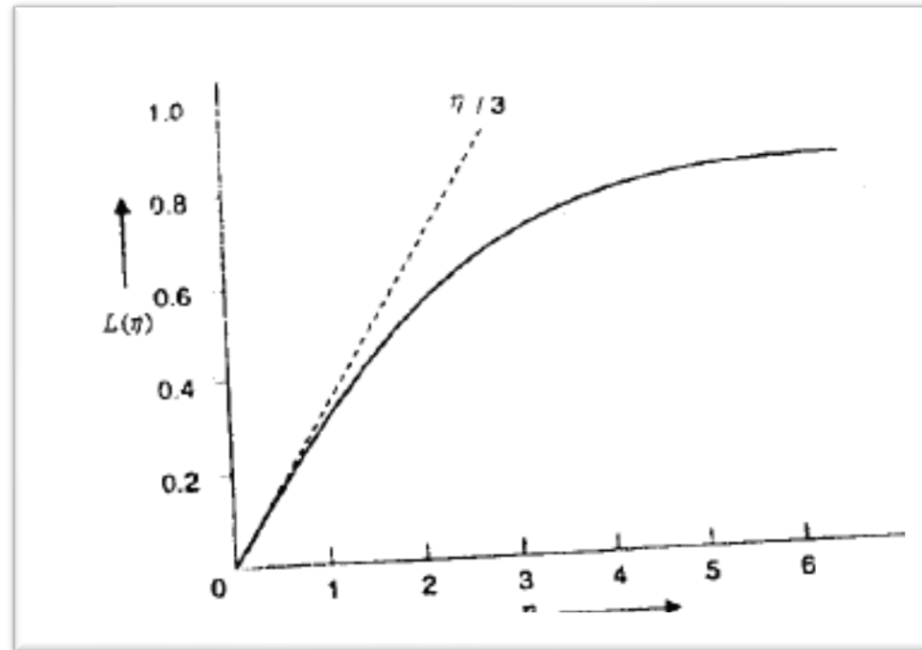
$$\bar{M} = n \langle \mu \cos \theta \rangle = n \frac{\int_0^\pi \mu \cos \theta dn}{\int_0^\pi dn} = n \mu \frac{\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta e^{\beta \mu H \cos \theta} d\theta}{\int_0^\pi \sin \theta e^{\beta \mu H \cos \theta} d\theta} \quad (4)$$

لإجراء التكامل الوارد بالمعادلة (4) نستخدم التعويضات التالية:

$$\eta = \beta\mu B = \frac{\mu B}{k_B T}, \quad y = \cos\theta \Rightarrow -\sin\theta = dy$$

$$\bar{M} = n\mu \frac{\int_{-1}^1 y e^{\eta y} dy}{\int_{-1}^1 e^{\eta y} dy} = n\mu \left[\frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{e^{\eta} - e^{-\eta}} - \frac{1}{\eta} \right] = n\mu \left[\coth\eta - \frac{1}{\eta} \right] = n\mu L(\eta) \quad \text{لنجد أن:}$$

حيث $L(\eta)$ هي دالة لانجفن (*langevin's function*) انظر الدالة بالشكل (4):



شكل (4) تغير دالة لانجفن $L(\eta)$ مع η

ملاحظات حول سلوك دالة لانجفن عند قيم η المنخفضة والمرتفعة:

1. لقيم η المنخفضة ($\eta \gg 1$) تأخذ الدالة القيمة $L(\eta) = 1$ وهذا يعني أن شدة المجال الخارجي قوية (أو درجة حرارة المادة منخفضة). ونجد أن $\bar{M}$ لا تعتمد علي B وتصل إلي درجة التشبع المغناطيسي.

$$\bar{\mu}_z = \mu \quad ; \quad \bar{M} = n\bar{\mu}_z$$

1. لقيم η المرتفعة ($\eta \ll 1$) وهذا يعني أن شدة المجال الخارجي ضعيفة (أو درجة حرارة المادة مرتفعة) نجد أن $\bar{M}$ تأخذ الشكل التقريبي التالي:

$$\bar{M} = n\bar{\mu}_z = n\mu L(\eta \ll 1) \approx n\mu \left(\frac{\eta}{3} - \frac{\eta^3}{45} + \dots \right) \approx \frac{n\mu^2}{3kT} H \quad (7)$$

ومن (7) نجد أن القابلية المغناطيسية للنظام تكون علي الصورة:

$$\chi = \lim \left(\frac{\partial M_{zn}}{\partial H} \right)_{H \rightarrow 0} \approx \frac{n\mu^2}{3kT} \approx \frac{C}{T} \quad (8)$$

وهو قانون كوري للمواد البارامغناطيسية.

مثال: ادرس الخواص الفيزيائية لنظام يتكون من عدد N من الالكترونات تقع في مجال مغناطيس خارجي H باعتبار الحركة المغزلية فقط للإلكترون.

الحل: اذا تواجد الإلكترون في مجال مغناطيسي خارجي فإن الحركة المغزلية للإلكترون إما أن تأخذ اتجاه المجال وتصبح طاقة الإلكترون $\varepsilon_{\uparrow} = -\mu H$ أو تأخذ الاتجاه المعاكس وتصبح طاقته $\varepsilon_{\downarrow} = \mu H$ كما بالشكل (1). وتحسب Z_{sp} كتالي:

$$Z_{sp} = e^{-\beta\varepsilon_{\uparrow}} + e^{-\beta\varepsilon_{\downarrow}} = e^{\eta} + e^{-\eta} = 2 \cosh\eta$$

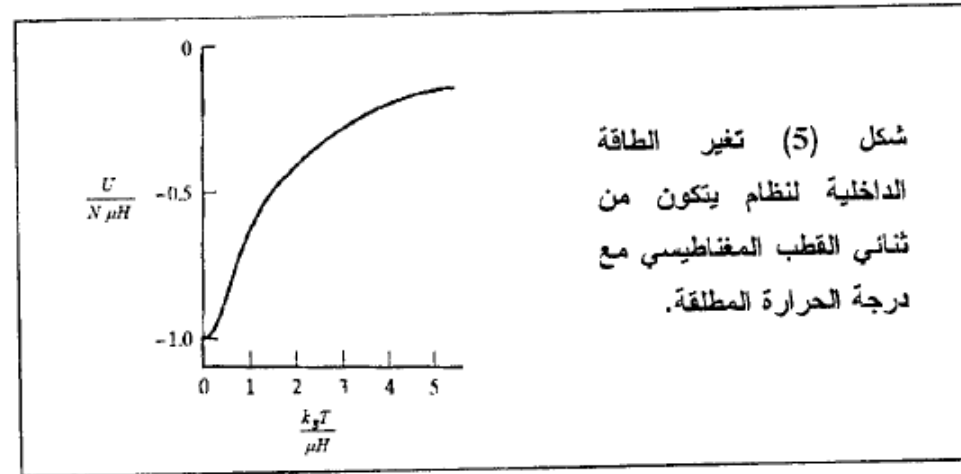
ولعدد N من الالكترونات نجد أن:

$$Z_N = (Z_{sp})^N = (2 \cosh(\eta))^N$$

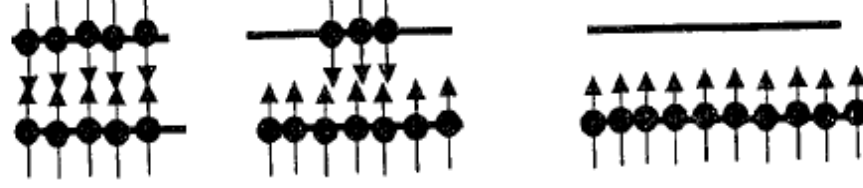
أ. حساب الطاقة الداخلية U

نحسب الطاقة الداخلية من العلاقة:

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}\right)_{V,N} = -N\mu H \tanh(\eta) - \begin{cases} 0 & T \rightarrow \infty \\ -N\mu H & T \rightarrow 0 \end{cases}$$



وبالنسبة للطاقة الداخلية نجد أن من الشكل (5) أنه: عند درجات الحرارة المنخفضة ($T \rightarrow 0$) فإن $U = -N\mu B$ وهذا يدل ببساطة علي أن جميع العزوم المغناطيسية للإلكترونات تكون موازية لاتجاه المجال الخارجي انظر الشكل (6-أ).



(أ) ($T \rightarrow 0$) (ب) ($T > 0$) (ت) ($T \rightarrow \infty$)

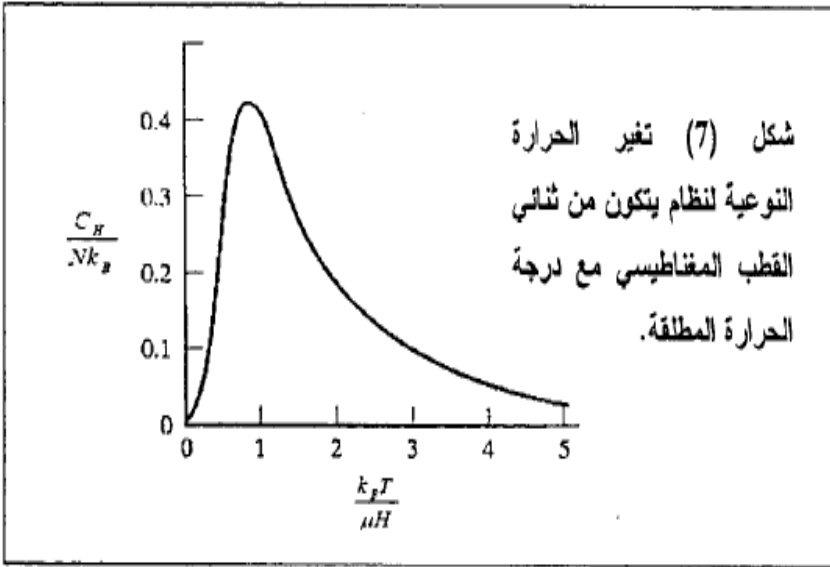
شكل (6) دوران العزوم بتغير درجات حرارة النظام. وللسهولة أخذنا اتجاهين فقط لأعلى ولأسفل.

وعندما تبدأ درجات الحرارة في الارتفاع نجد أن العزوم تبدأ بالانقلاب انظر الشكل (6-ب)، وعندما تؤول درجة الحرارة الي مالا نهاية نصل الي الحالة العشوائية ويصبح عدد العزوم المتجهة لأعلى باتجاه المجال الخارجي كعدد العزوم المتجهة لأسفل انظر الشكل (6-ت) وتصل الطاقة الداخلية الي الصفر. بتعبير آخر نستطيع أن نقول أنه بارتفاع درجات الحرارة فإن الطاقة الحرارية كافية لجعل دوران العزوم في اتجاهات عشوائية.

أ. حساب الحرارة النوعية C_H

تحسب الحرارة النوعية C_H من العلاقة:

$$C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_H = \frac{Nk_B \eta^2}{\cosh^2 \eta} = \begin{cases} 0, T \rightarrow \infty \\ 0, T \rightarrow 0 \end{cases}$$



■ بالنسبة للحرارة النوعية نجد من الشكل (7) أنه عند درجات الحرارة المنخفضة ($T \rightarrow 0$) فإن $C_H \rightarrow 0$ وهو يدل ببساطة علي انه عند تحقق الشرط $k_B T \ll 2\mu B$ فإن جميع العزوم المغناطيسية للإلكترونات تكون موازية لاتجاه المجال الخارجي وتكون الطاقة كمية ثابتة.

- وعندما تبدأ درجات الحرارة في الارتفاع نجد أن العزوم تبدأ بالانقلاب وترتفع الحرارة النوعية الي قيمة قصوي انظر الشكل (7).
- وعندما تؤل درجة الحرارة الي مالانهاية نصل الي الحالة العشوائية ويصبح عدد العزوم المتجهة لأعلي باتجاه المجال الخارجي كعددها المتجهة لأسفل وتقل الطاقة الداخلية الي الصفر وكذلك الحرارة النوعية.
- ولنا ملاحظة مهمة هنا وهي أن هذا السلوك خاص فقط بهذا النظام لأنه يحتوي علي مستويين فقط. وحيث أن معظم الأنظمة الفيزيائية تحتوي علي عدد لانهائي من مستويات الطاقة لذلك فإن الحرارة النوعية تصل الي قيمة ثابتة ولا تقل.

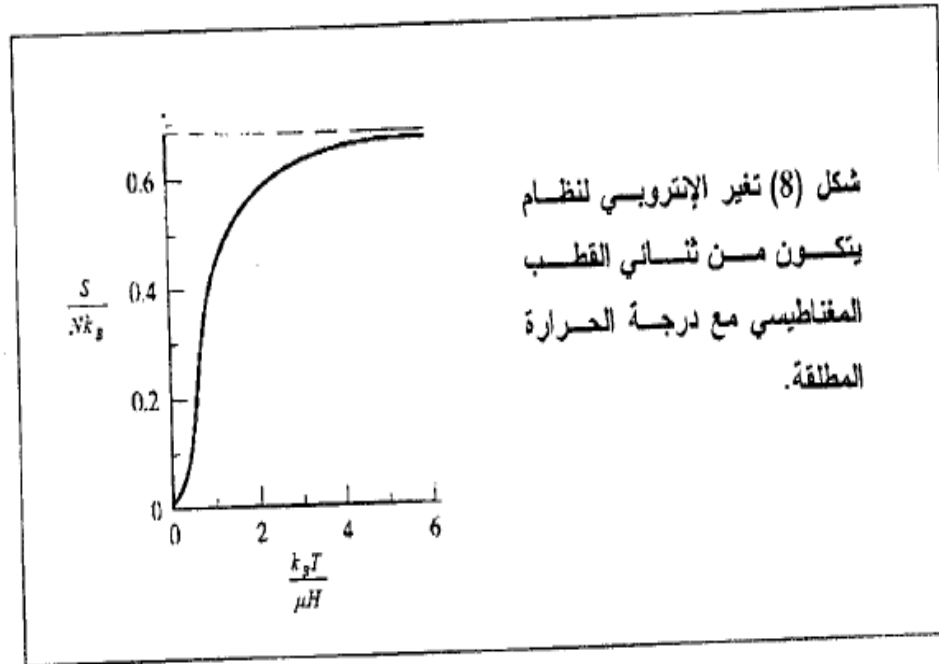
أ. حساب الإنتروبي S

يحسب الإنتروبي من دالة هلمهولتز:

$$F = -Nk_B T \ln Z_N$$

كتالي:

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = Nk_B \ln[2 \cosh(\eta) - \eta \tanh(\eta)] = \begin{cases} Nk_B \ln 2, & T \rightarrow \infty \\ 0, & T \rightarrow 0 \end{cases}$$



- بالنسبة الي الإنتروبي نجد من الشكل (8) أنه عند درجات الحرارة المنخفضة ($T \rightarrow 0$) فإن $S \rightarrow 0$ وهذا يدل ببساطة علي أنه عند تحقق الشرط $k_B T \ll 2\mu B$ فإن جميع العزوم المغناطيسية للإلكترونات تكون موازية لاتجاه المجال الخارجي وبالتالي يوجد مستوي مجهري واحد فقط ومن تعريف الإنتروبي نجد أن:

$$S = -Nk_B \ln W = Nk_B \ln 1 = 0$$

وهذا يتفق مع القانون الثالث للديناميكا الحرارية.

- وعندما تبدأ درجات الحرارة في الارتفاع نجد أن العزوم تبدأ بالانقلاب.
- وعندما تؤول درجة الحرارة الي مالانهاية نصل الي الحالة العشوائية ويصبح عدد العزوم المتجهة لأعلي باتجاه المجال الخارجي كعددتها المتجهة لأسفل، وبالتالي يوجد مستويين مجهرين فقط. ومن تعريف الإنتروبي نجد أن أعلي قيمة يصل إليها الإنتروبي هو:

$$S = Nk_B \ln W = Nk_B \ln 2$$

Vi- حساب العزم المغناطيسي الكلي $\bar{M}$

يحسب العزم المغناطيسي الكلي $\bar{M}$ كتالي:

$$\bar{M} = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{V,N} = n\bar{\mu} = \frac{\mu e^{\eta} - \mu e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}} = n\mu \tanh \eta$$

وهذا يتفق مع ما حصلنا عليه في المعادلة (1).