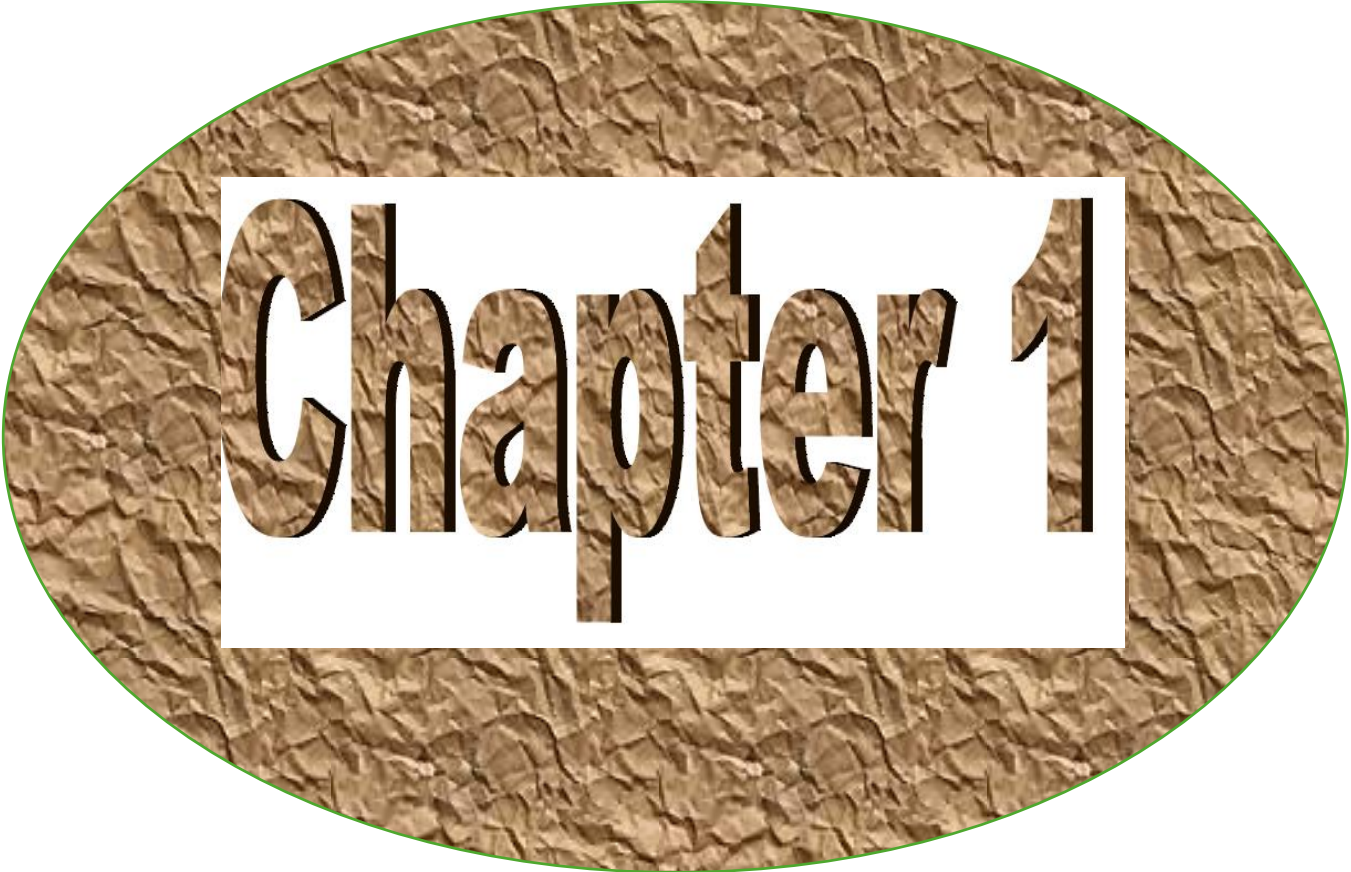






Chapter 1

Indefinite Integrals

التكامل غير المحدود

Indefinite Integral

التكامل غير المحدود

مقدمة: علم التكامل علم قائم بذاته لكن لابد لدراسته أن يكون الدارس ملماً بفروع شتى مثل التفاضل ، الجبر وبعض من مفاهيم الهندسة التحليلية سواء كانت في المستوى أو في الفراغ. هناك من يقول أن التكامل هو عملية عكسية للتفاضل لكن لي رأي مخالف بعض الشيء حيث أننا عند تفاضل ناتج التكامل فمن المفترض أن نحصل على أصل الدالة لكن ماذا يحدث عند تكامل دوال وتكون نتيجة التكامل تقريبية أو عددية؟

لدارس التكامل سؤال يفرض نفسه:

كيف يظهر التكامل في حياتنا وفي تخصصات الهندسة المختلفة؟

أمثله للإجابة على هذا السؤال:

- ١) قياس المسافة بين نقطتين على سطح الكرة الأرضية .
- ٢) تحديد أقل فترة زمنية لتحرك جسم بين نقطتين على سطح الأرض .
- ٣) تحديد مركز الثقل لأي شكل هندسي .
- ٤) طول المنحنى في المستوى .
- ٥) المساحة تحت المنحنى وأي من المحاور الكرتيزية .
- ٦) حجم مجسم ناتج من دوران أي شكل هندسي حول أي محور أيا كانت نقطة أصلها.

1-1 المشتقة العكسية:

من دراستنا (السابقة) للتفاضل نعلم أنه إذا كانت: $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$,

فإن الدالة $f(x)$ تسمى بمشتقة الدالة $F(x)$ وتسمى الدالة $F(x)$ بالمشتقة العكسية

إذا كانت $f(x) = x$ ، فيمكننا إيجاد المشتق العكسي لها وهي $F(x) = \frac{1}{2} x^2$ من خلال إدراك أن

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2) = \frac{1}{2} (2x) = x.$$

وبالتالي فإن $F(x) = \frac{1}{2} x^2$ هو المشتقة العكسية لـ $f(x) = x$.

لاحظ أنه يجب عليك دائماً التحقق من المشتقة العكسية $F(x)$ عن طريق اشتقاقها والتأكد من أنك تستعيد $f(x)$.

تعريف 1: إذا كانت الدالة $f(x)$ ، فإن المشتقة العكسية لـ $f(x)$ هي أي دالة $F(x)$ بحيث:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

أوجد المشتقة العكسية لكل من الدوال التالية:

مثال ١:

- (a) $f(x) = 2x$,
- (b) $g(x) = \cos x (x)$,
- (c) $h(x) = \frac{1}{x} + 2e^{2x}$

الحل

علينا التفكير بشكل عكسي هنا: ونسأل أنفسنا ما هي الدالة التي نعرف أن مشتقتها تساوي الدالة المعطاة؟

(a) $F(x) = x^2,$

(b) $G(x) = \sin x,$

(c) $H(x) = \ln|x| + e^{2x}$

لاحظ أن: الدالة $F(x) = x^2$ ليست الوحيدة التي مشتقتها تساوي $2x$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x \quad \text{لأنه إذا كانت } C \text{ ثابتًا فإن}$$

نظرًا لأن مشتقة الثابت تساوي صفر. لذا فإن الدوال $x^2 + C$ ، حيث C هو ثابت اختياري،

تشكل جميع المشتقات العكسية لـ $f(x) = 2x$

بشكل عام، لدينا النتيجة التالية:

نظرية: إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على فترة I ، فإن المشتقة عكسية العامة لـ f على I هي

$$F(x) + C$$

• بالتالي فإن المشتقة العكسية الأكثر عمومية لـ f على I هي عائلة من الدوال $F(x) + C$ ،

• يمكننا اختيار مشتقة عكسية معينة من هذه العائلة عن طريق تعيين قيمة محددة لـ C .

• فيما يلي مثال يوضح كيفية إجراء مثل هذه المهمة

مثال ٢:

أوجد المشتقة العكسية لـ $f(x) = 3x^2$ التي تحقق الشرط التالي $F(1) = -1$

الحل

نظرًا لأن مشتقة x^3 هي $3x^2$ ، فإن المشتقة العكسية العامة تكون $F(x) = x^3 + C$

وهي تعطي جميع المشتقات العكسية لـ $f(x)$

اما الشرط $F(1) = -1$ يحدد قيمة معينة لـ C .

فعند التعويض عن $x = 1$ في $F(x) = x^3 + C$ نحصل على:

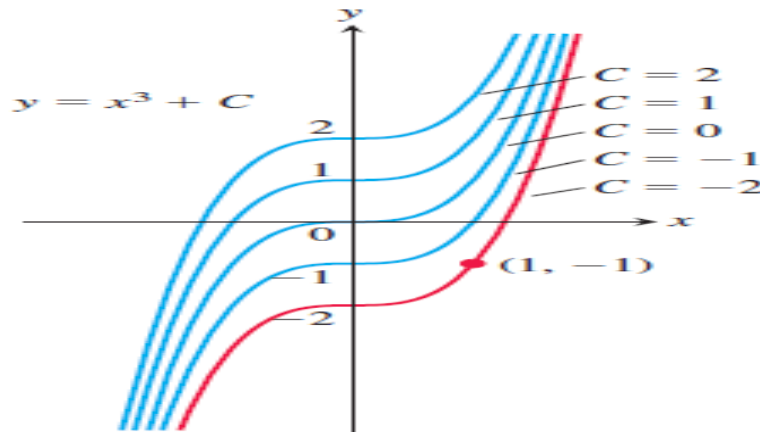
$$F(1) = (1)^3 + C = 1 + C$$

$$\therefore -1 = 1 + C$$

حل المعادلة يعطي $C = -2$.

لذا، فإن $F(x) = x^3 - 2$ هي المشتقة العكسية التي تحقق $F(1) = -1$.

لاحظ أن: هذا التعيين للثابت C يحدد منحنى معين من عائلة المنحنيات $y = x^3 + C$ التي تمر بالنقطة $(1, -1)$ في المستوى. (الشكل ١)



الشكل ١: المنحنيات $y = x^3 + C$ تغطي المستوى الإحداثي دون تداخل.

تعريف ٢: إذا كانت $F(x)$ هي أي مشتقة عكسية لـ $f(x)$ ، فإنها تُسمى التكامل غير المحدود ويرمز لها بالصيغة:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

في هذا التعريف، تُسمى $\int$ رمز التكامل، و $f(x)$ تُسمى الدالة المكاملة و x تُسمى متغير التكامل و $F(x)$ هو ناتج التكامل و C يسمى ثابت التكامل.

٢-١ جداول التكاملات:

١	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
٢	$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$
٣	$\int e^x dx = e^x + c$
٤	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
٥	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a } + c$
٦	$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$
٧	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
٨	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
٩	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$
١٠	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$

1	$\int \sin x \, dx$	$-\cos x + c$
2	$\int \cos x \, dx$	$\sin x + c$
3	$\int \sec^2 x \, dx$	$\tan x + c$
4	$\int \csc^2 x \, dx$	$-\cot x + c$
5	$\int \sec x \tan x \, dx$	$\sec x + c$
6	$\int \csc x \cot x \, dx$	$-\csc x + c$

၁	$\int \sin f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c$
၂	$\int \cos f(x) f'(x) dx = \sin f(x) + c$
၃	$\int \sec^2 f(x) f'(x) dx = \tan f(x) + c$
၄	$\int \csc^2 f(x) f'(x) dx = -\cot f(x) + c$
၅	$\int \sec f(x) \tan f(x) f'(x) dx = \sec f(x) + c$
၆	$\int \csc f(x) \cot f(x) f'(x) dx = -\csc f(x) + c$

1	$\int \sinh x \, dx$	$\cosh x + c$
2	$\int \cosh x \, dx$	$\sinh x + c$
3	$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx$	$\tanh x + c$
4	$\int \operatorname{csch}^2 x \, dx$	$-\coth x + c$
5	$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx$	$-\operatorname{sech} x + c$
6	$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx$	$-\operatorname{csch} x + c$

1	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\sin^{-1} x + c$
2	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$	$\sinh^{-1} x + c$
3	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	$\cosh^{-1} x + c$
4	$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\tan^{-1} x + c$
5	$\int \frac{1}{1-x^2} dx$	$\tanh^{-1} x + c$
6	$\int \frac{-1}{x^2-1} dx$	$\coth^{-1} x + c$

1	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$	$\sin^{-1} \frac{x}{a} + c$
2	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$	$\sinh^{-1} \frac{x}{a} + c$
3	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$	$\cosh^{-1} \frac{x}{a} + c$
4	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$	$\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$
5	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx$	$\frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + c$
6	$\int \frac{-1}{x^2-a^2} dx$	$\frac{1}{a} \coth^{-1} \frac{x}{a} + c$

٣-١ خواص التكامل المحدود

$$1) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ where } k \text{ is any number}$$

$$2) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$3) \int [f(x) * g(x)] dx \neq \int f(x) dx * \int g(x) dx$$

$$4) \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

احسب التكاملات التالية:

مثال ٣:

$$(1) \int [5x^3 - 10x^2 + 2x - 3] dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= 5 \int x^3 dx - 10 \int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int dx \\ &= \frac{5}{4} x^4 - \frac{10}{3} x^3 + x^2 - 3x + c \end{aligned}$$

$$(2) \int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \left[x^6 + 2 + \frac{1}{x^6} \right] dx \\ &= \int x^6 dx + 2 \int dx + \int x^{-6} dx \\ &= \frac{1}{7} x^7 + 2x - \frac{1}{5} x^{-5} + c \end{aligned}$$

$$(3) \int (x + \sqrt[3]{x}) (4 - x^2) dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \left[4x - x^3 + 4x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{7}{3}} \right] dx \\ &= 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + 3x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + c \end{aligned}$$

$$(4) \int \frac{4x^{10} - 2x^4 + 15x}{x^3} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4x^{10} - 2x^4 + 15x}{x^3} dx \\ &= \int [4x^7 - 2x + 15x^{-2}] dx \\ &= \frac{1}{2}x^8 - x^2 - 15\frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

$$(5) \int \sin^5 x \cos x dx$$

Solution

$$I = \frac{1}{6} \sin^6 x + c$$

$$(6) \int \frac{(1 + \tan x)^2}{\cos^2 x} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int (1 + \tan x)^2 \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{3} (1 + \tan x)^3 + c \end{aligned}$$

$$(7) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Solution

$$I = \int \ln x \left(\frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

$$(8) \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int (1 + \ln x)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= \frac{3}{4} (1 + \ln x)^{\frac{4}{3}} + c \end{aligned}$$

$$(9) \int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{-1}{3} \int [1 - x^3]^{\frac{1}{2}} (-3x^2) dx \\ &= \frac{-2}{9} (1 - x^3)^{\frac{3}{2}} + c \end{aligned}$$

$$(10) \int \left(\frac{23}{1+x^2} + \sec x \tan x \right) dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{23}{1+x^2} dx + \int \sec x \tan x dx \\ &= 23 \tan^{-1} x + \sec x + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

احسب التكاملات التالية:

مثال ٤

$$(1) \int \frac{x+1}{2x^2+4x+3} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int \frac{4(x+1)}{2x^2+4x+3} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln|2x^2 + 4x + 3| + c \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x} dx$$

Solution

$$I = \ln|1 + \tan x| + c$$

$$(3) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx \\ &= \ln |\ln x| + c \end{aligned}$$

Solution

$$(4) \int \frac{1+\ln x}{3+x \ln x} dx$$

$$I = \ln |3 + x \ln x| + c$$

$$(5) \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x} dx \\ &= - \ln |\sin x + \cos x| + c \end{aligned}$$

$$(6) \int \frac{(1+x) e^x}{1+x e^x} dx$$

Solution

$$I = \ln |1 + x e^x| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

احسب التكاملات التالية:

مثال 5

$$(1) \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$$

Solution

$$I = 2\sqrt{1+e^x} + c$$

-

$$(2) \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx$$

Solution

$$I = 2\sqrt{x^2-x+1} + c$$

$$(3) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Solution

$$I = \frac{-1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{-1}{2} 2\sqrt{1-x^2} + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

احسب التكاملات التالية:

مثال 6

$$(1) \int e^{3x} dx$$

Solution

$$I = \frac{1}{3} \int e^{3x} (3) dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

$$(2) \int e^{5x^3} x^2 dx$$

Solution

$$I = \frac{1}{15} \int e^{5x^3} (15x^2) dx$$

$$= \frac{1}{15} e^{5x^3} + c$$

$$(3) \int (x-2) e^{x^2-4x} dx$$

Solution

$$I = \frac{1}{2} \int e^{x^2-4x} (2x-4) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2-4x} + c$$

$$(4) \int \sec^2 2x e^{\tan 2x} dx$$

Solution

$$I = \frac{1}{2} \int e^{\tan 2x} (2 \sec^2 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{\tan 2x} + c$$

$$(5) \int e^{2x^2 + \ln x} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x^2} e^{\ln x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int e^{2x^2} (4x) dx \\ &= \frac{1}{4} e^{2x^2} + c \end{aligned}$$

$$(6) \int e^{-\frac{1}{x} - 2 \ln x} dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-\frac{1}{x}} e^{-2 \ln x} dx \\ &= \int e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} \right) dx = e^{-\frac{1}{x}} + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int a^{f(x)} f'(x) dx &= \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c \end{aligned}$$

احسب التكاملات التالية:

مثال 7

$$(1) \int 2^x dx$$

Solution

$$I = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$(2) \int 5^{x^2} x dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int 5^{x^2} (2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{5^{x^2}}{\ln 5} + c \end{aligned}$$

١-٤ تكامل الدوال المثلثية:

احسب التكاملات التالية:

مثال 8

$$(1) \int \tan x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c \end{aligned}$$

$$(2) \int \cot x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= \ln|\sin x| + c \end{aligned}$$

$$(3) \int \sec x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{(\sec x + \tan x)} dx \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + c \end{aligned}$$

$$(4) \int \csc x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\csc x (\csc x - \cot x)}{(\csc x - \cot x)} dx \\ &= \int \frac{\csc^2 x - \csc x \cot x}{(\csc x - \cot x)} dx \\ &= \ln|\csc x - \cot x| + c \end{aligned}$$

١-٥ تكامل مربعات الدوال المثلثية:

لإيجاد هذه التكاملات سوف نستخدم القوانين الخاصة بالدوال المثلثية

$$(i) \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \implies \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$(ii) \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \implies \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$(iii) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \implies \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$(iv) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \implies \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

احسب التكاملات التالية:

مثال ٩

$$(1) \int \sin^2 x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right] + c \end{aligned}$$

$$(2) \int \cos^2 x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right] + c \end{aligned}$$

$$(3) \int \tan^2 x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \tan x - x + c \end{aligned}$$

$$(4) \int \cot^2 x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \int (\csc^2 x - 1) \, dx \\ &= -\cot x - x + c \end{aligned}$$

٦-١ تكامل لحاصل ضرب الدوال المثلثية:

لإيجاد هذه التكاملات سوف نستخدم القوانين الخاصة بالدوال المثلثية

$$(i) \sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$$

$$(ii) \sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$$

$$(iii) \cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$$

احسب التكاملات التالية:

مثال 10

$$(1) \int \sin 5x \cos 3x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int [\sin 2x + \sin 8x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\cos 8x}{8} \right] + c \end{aligned}$$

$$(2) \int \sin 7x \sin 4x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 11x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 11x}{11} \right] + c \end{aligned}$$

$$(3) \int \cos 5x \cos 3x \, dx$$

Solution

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int [\cos 2x + \cos 8x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8} \right] + c \\ &= \frac{1}{4} \left[\sin 2x + \frac{\sin 8x}{2} \right] + c \end{aligned}$$

تمارين ١

Evaluate the following integrals

1) $\int [7x^2 - 10x - 1] dx$

Ans. $\frac{7}{3}x^3 - 5x^2 - x + c$

2) $\int \left(x^8 - \frac{1}{x^8}\right)^2 dx$

Ans. $\frac{1}{17}x^{17} - 2x - \frac{1}{15}x^{-15} + c$

3) $\int [\sin 3x + \tan 5x] dx$

Ans. $-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\sec^2 5x + c$

4) $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

Ans. $x + \sin^2 x + c$

5) $\int (2 + \tan x)^2 dx$

Ans. $3x + 4 \ln|\sec x| + \tan x + c$

6) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

Ans. $\tan x - \cot x + c$

7) $\int (\csc 3x + \cot 3x)^2 dx$

Ans. $-\frac{2}{3}\cot 3x - \frac{2}{3}\csc 3x - x + c$

8) $\int \frac{\cos 5x}{3 + \sin 5x} dx$

Ans. $\frac{1}{5} \ln|3 + \sin 5x| + c$

9) $\int (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)^7 dx$

Ans. $-\frac{1}{8}(\sin x + \cos x)^2 + c$

$$10) \int \sec^2 x \sqrt{5 + \tan x} \, dx$$

$$\text{Ans. } \frac{2}{3} (5 + \tan x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$11) \int \cos x \, e^{5+\sin x} \, dx$$

$$\text{Ans. } e^{5+\sin x} + c$$

$$12) \int \sin 3x \sin(\cos 3x) \, dx$$

$$\text{Ans. } \frac{1}{3} \cos(\cos 3x) + c$$

$$13) \int \cot x \ln \sin x \, dx$$

$$\text{Ans. } \frac{1}{2} (\ln \sin x)^2 + c$$

$$14) \int e^x \cos(e^x) \, dx$$

$$\text{Ans. } \sin(e^x) + c$$

$$15) \int \sec x \sqrt{\sec x + \tan x} \, dx$$

$$\text{Ans. } 2 \sqrt{\sec x + \tan x} + c$$

$$16) \int \frac{\sin 5x + \cos 5x}{\sin 5x - \cos 5x} \, dx$$

$$\text{Ans. } \frac{1}{5} \ln |\sin 5x - \cos 5x| + c$$

$$17) \int \frac{\sin x + \cos x}{e^{-x} + \sin x} \, dx$$

$$\text{Ans. } \ln |1 + e^x \sin x| + c$$

$$18) \int \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2} \, dx$$

$$\text{Ans. } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} + c = \frac{x}{1+x} + c \pi$$

(19) $\int \sin 4x \cos 2x \, dx$

Ans. $\frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 2x}{2} - \frac{\cos 6x}{6} \right] + c$

(20) $\int \cos 3x \sin 6x \, dx$

Ans. $\frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 3x}{3} - \frac{\cos 9x}{9} \right] + c$

(21) $\int \sin 5x \sin 2x \, dx$

Ans. $\frac{1}{2} \left[\frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 7x}{7} \right] + c$

(22) $\int \cos 7x \cos 4x \, dx$

Ans. $\frac{1}{2} \left[\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 11x}{11} \right] + c$