

التوزيعات الاحتمالية

x

⊛ المتغير العشوائي

مجموع الدرجات السؤال
رقم ()

الدرجة	الفقرة
أ-١	
ب-٢	
ج-٣	
د-٤	
هـ-٥	
و-٦	
ز-٧	

و لكل نوع من المتغير العشوائي المتفصل

② المتفصل

وسوف ندرس كل نوع

① المتغير العشوائي المتفصل

وتكون على الصورة $x_1, x_2, \dots, x_n$
أي كل متغير يكون منفصل عن الآخر

⊛ التوزيع الاحتمالي

المتغير العشوائي ما x عبارة عن

واله يقصد احتمالات قيم x المختلفة وهذه

الدالة عبارة عن جدول أو صيغة رياضية تبين

قيم x المختلفة واحتمالاتها في شروط

$$① P(x) \geq 0 \quad ② \sum P(x)$$

$$\mu = E(x) = \sum x P(x) \quad \text{التوقع}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad \text{التباين}$$

$$\sigma = \sqrt{V(x)} \quad \text{الانحراف المعياري}$$

مطابق التوزيع الاحتمالي لعدد ظهور الصورة

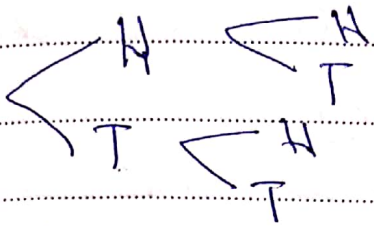
مثال: عند القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

فأوجد (1) التوزيع الاحتمالي لعدد ظهور صورة

(2) التوقع والاحتمال لعدد ظهور صورة

الحل:

عند القاء قطعة نقود مرتين



فضاء العينة $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

$$n(S) = 4$$

بفرض X هو ظهور الصورة

$$P(X=0) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(X=1) = \frac{2}{4}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}$$

(1) جابه الجدول الاحتمالي

X	0	1	2	المجموع
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

ولايجاد التوقع والقياس

X	0	1	2	المجموع
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$X P(X)$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	1
X^2	0	1	4	
$X^2 P(X)$	0	$\frac{2}{4}$	1	1.5

$$\text{التوقع} = E(X) = \sum X P(X) = 1$$

$$E(X^2) = \sum X^2 P(X) = 1.5$$

$$\begin{aligned} \text{التباين} = V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 1.5 - 1 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\text{الخيار المعياري} = \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.5}$$

مثال ② إذا الصيت وقطعه الشقوق ثلاثة مرات

متتاليته فأمر حسب التوزيع الاحتمالي في صورة

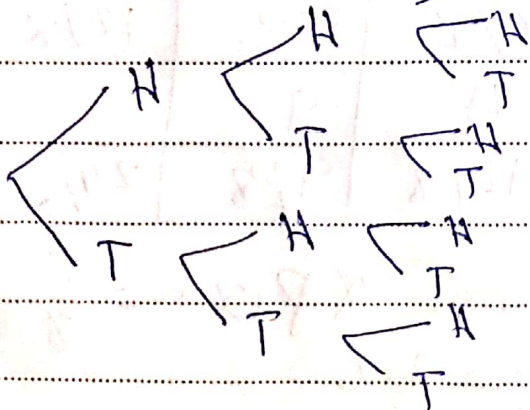
جول ثم اوجد ① افعال ظهور صورة واحدة على الأقل

② افعال ظهور أكثر من صورة

③ التوقع والاختلاف المعياري

الحل :-

عند القاء قطع الشقوق ثلاثة مرات



$$S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$$

$$n(S) = 8$$

١٠ جدول التوزيع الاحتمالي

X	0	1	2	3
P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8

١١ احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل

$$P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

١٢ احتمال ظهور ٢ أو أكثر من الصور

$$P(X \geq 2) = P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

١٣ إيجاد التوقع والانحراف المعياري

X	0	1	2	3	المجموع
P(X)	1/8	3/8	3/8	1/8	
XP(X)	0	3/8	6/8	3/8	12/8
X ²	0	1	4	9	
X ² P(X)	0	3/8	12/8	9/8	24/8 = 3

$$\text{التوقع} = \mu = E(X) = \sum X P(X) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$E(X^2) = \sum X^2 P(X) = 3$$

$$\text{التباين} = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - 1.5 = 1.5$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.5}$$

توزيعات متقطعة

X

① توزيع ذات الحسنة

مجموع درجات السؤال
رقم ()

نقوم عند إجراء تجربة لها نتيجتين فقط مثل
الفشل والنجاح ويعرف من اتنا أجرينا تجربة n
مرة المرار = وكان احتمال ظهور الحسنة p وعدم
ظهوره $q = 1 - p$ فإن

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}, \quad q = 1 - p$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\mu = E(x) = np$$

فإن التوقع

$$V(x) = npq$$

التباين

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{npq}$$

والانحراف المعياري

مثال ① إذا أُلقيت قطعة نقود 4 مرات فما

احتمال ظهور صورة 3 مرات ثم اوجد التوقع

والانحراف المعياري

الحل

$$4 = n = \text{عدد التجارب}$$

$$\text{احتمال ظهور الصورة} = p = \frac{1}{2}$$

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ويعرف من أن x هو ظهور الصورة فإن

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}, \quad q = 1 - p$$

$$\rightarrow *), P(x) = C_x^4 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$$

$$P(3) = C_3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = 4 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$*) \text{ التوقع } = E(x) = np = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$* \text{ التباين } = V(x) = npq = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{الانحراف المعياري} = \sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{1} = 1$$

مثال ~~في~~ قدرت شركة للطيران انه احتمال وصول الطائرة التي تقوم من مطار لندن الى مطار مدريد في موعدها هو 0.7 فإذا قامت 4 طائرات من طائرات الشركة من لندن الى مدريد فأوجد:

- ① التوزيع الاحتمالي لعدد طائرات التي تصل في موعدها
- ② احتمال وصول 3 طائرات على الأقل في موعدها
- ③ احتمال $\sim$ طائرته واحدة على الأقل $\sim$
- ④ متوسط وانحراف المعياري لعدد الطائرات التي تصل في موعدها

الحل:

$$\text{عدد الطائرات} = n = 4$$

$$p = 0.7, q = 1 - p = 1 - 0.7 = 0.3$$

نفرض انه x عدد الطائرات التي تصل في موعدها

$$P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$

$$\Rightarrow P(X) = C_X^4 (0.7)^X (0.3)^{4-X}$$

$$X = 0, 1, 2, 3, 4$$

مجموع الدرجات السؤال
(رقم)

$$P(0) = C_0^4 (0.7)^0 (0.3)^{4-0}$$

$$= 1 \times 1 \times (0.3)^4 = 0.0081$$

الدرجة

الفقرة

أ-1

$$P(1) = C_1^4 (0.7)^1 (0.3)^{4-1}$$

$$= 4 \times 0.7 \times (0.3)^3 = 0.0756$$

ب-2

$$P(2) = C_2^4 (0.7)^2 (0.3)^{4-2}$$

$$= 6 \times (0.7)^2 \times (0.3)^2 = 0.2646$$

ج-2

د-4

$$P(3) = C_3^4 (0.7)^3 (0.3)^{4-3}$$

$$= 4 \times (0.7)^3 \times 0.3 = 0.4116$$

هـ-0

و-1

$$P(4) = C_4^4 (0.7)^4 (0.3)^{4-4}$$

$$= 1 \times (0.7)^4 \times 1 = 0.2401$$

ز-7

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.0081	0.0756	0.2646	0.4116	0.2401

$$\textcircled{2} P(X \geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$= 0.0756 + 0.2646 + 0.4116 + 0.2401$$

$$= 0.9919$$

$$\textcircled{3} P(X \geq 3) = P(3) + P(4) = 0.4116 + 0.2401$$

$$= 0.6517$$

$$*) \mu = np = 4 \times 0.7 = 2.8$$

$$*) \sigma = \sqrt{npq}$$

$$= \sqrt{4 \times 0.7 \times 0.3} = \sqrt{0.84}$$

مثال 3) إذا كان احتمال إصابة الطائر بالمرض هو 0.8 فإذا افترضت أنه طائر انت على الهدف فأوجد

1) دالة التوزيع الاحتمالي لعدد طائرات إلى نصيب الهدف

2) متوسط وانحراف المعياري للتوزيع

الحل

$$p = 0.8, q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$$

$$n = 5$$

بفرض أن X هو عدد الطائرات التي نصيب الهدف

$$*) P(x) = C_x^n p^x q^{n-x}, \quad q = 1 - p$$

$$P(x) = C_x^5 (0.8)^x (0.2)^{5-x}$$

$$*) \mu = np = 5 \times 0.8 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \times 0.8 \times 0.2} = \sqrt{0.8}$$

[2] توزيع بواسون

توجد بعض الظواهر النادرة مثل الزلازل -
الحرائق - الحوادث على احدى الطرق -
عدد الازمطة الطبيعية في صفحة من كتاب ما
يقوم ان X ترمز لقيم الظاهرة

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

حيث ان λ -

① X هي قيم الظاهرة وتأخذ $0, 1, 2, \dots$

② λ متوسط قيم الظاهرة

③ e مقدار ثابت [أي e طبيعي للوغاريتم]

$$\lambda = \mu = \text{المتوسط}$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \text{الانحراف المعياري}$$

مثال ① - إذا كان متوسط عدد الحوادث اليومية على

أحد الطرق هو حادثتين فما احتمال وقوع

3 حوادث في احدى الطرق

الحل -

يقوم ان X عدد الحوادث اليومية

λ متوسط الظاهرة $\lambda = 2$

$$P(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow P(3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!}$$

$$P(X=3) = e^{-2} \frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} * e^{-2}$$

مثال ② إذا كان متوسط عدد الزلازل السنوية في إحدى الدول هو 0.6 فأما حسب احتمال وقوع زلزال معين في أحد الجغرافيا ثم اوجد المتوسط لمعدل والاربعاء الجغرافيا لكي ثم اوجد احتمال وقوع زلزال معين في أكثر من مكان
الحد -

بعضنا اسم عدد الزلازل X

متوسط عدد الزلازل $\lambda = 0.6$

$$*) P(X) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow *) P(x) = e^{-0.6} \frac{(0.6)^x}{x!}$$

$$*) P(X=2) = e^{-0.6} \frac{(0.6)^2}{2!} = 0.099$$

$$*) \lambda = 0.6$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{0.6}$$

$$*) P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$\Rightarrow P(X \leq 2) = e^{-0.6} \frac{(0.6)^0}{0!} + e^{-0.6} \frac{(0.6)^1}{1!} + e^{-0.6} \frac{(0.6)^2}{2!}$$

$$= e^{-0.6} [1 + 0.6 + 0.18] = 0.78 e^{-0.6}$$

$$*) P(X \geq 2) = 1 - [P(0) + P(1)]$$

$$= 1 - \left[e^{-0.6} \frac{(0.6)^0}{0!} + e^{-0.6} \frac{(0.6)^1}{1!} \right]$$

$$= 1 - e^{-0.6} (1 + 0.6) = 1 - 1.6 e^{-0.6}$$

$$= 1 - 1.6 e^{-0.6}$$

----- *

مثال 5

إذا كان متوسط عدد الجرائد المهربة في إحدى المدن الكبيرة هو ثلاثة جرائد فما احتمال أن يقع في أحد الميادين

① حريقاً ② حريقاً على الأكثر

③ حريقاً على الأقل

الحل :-

نقرض أن عدد الجرائد هو X

متوسط $\lambda = 3$

$$P(X) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow P(X) = e^{-3} \frac{3^x}{x!}$$