

5.5 فترة تقدير النسبة P وحجم العينة

1.5.5 حجم المجتمع كبير

من المعالم الهامة للمجتمع هو تقدير النسبة لأنها تستخدم في قياس معظم الظواهر السياسية والاجتماعية وبالذات الظواهر الوصفية مثل قياس اتجاهات الرأي العام، وقياس نسبة عدد المواليد في مجتمع ما، ونسبة الفقر... وغيرها، فهذه المجتمعات في الغالب تتبع توزيع ذي الحدين بتوقع (الوسط الحسابي) $\mu = P$.
 وحيث أن $\hat{P} = \sum \frac{X_i}{n}$ وسط حسابي، فمن النظرية الأساسية للتقريب نستنتج أن هذا الوسط يخضع تقريباً لتوزيع طبيعي أي أن:

$$\hat{P} \sim N(P, P(1-P)/n)$$

لذلك فإن فترة تقدير النسبة P تكون على الصورة التالية:

$$P = \hat{P} \pm \left(Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \right)$$

فلو افترضنا أن نسبة المواليد في دولة ما هي P وأخذت عينة عشوائية كبيرة بدرجة كافية، وأن نسبة المواليد في هذه العينة هي $\hat{P}$ فإن خطوات تقدير النسبة في المجتمع (الدولة) تكون كما يلي:

أ. نحسب النسبة في العينة $\hat{P}$.

ب. نحسب الخطأ المعياري للنسبة والذي يساوي في هذه الحالة:

$$\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

ج. نضرب الخطأ المعياري للنسبة في معامل الثقة المناسب $Z_{\alpha/2}$ (حسب درجة الثقة المطلوبة) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو من الجدول الذي يحوي أهم درجات ومعاملات الثقة والذي ذكرناه آنفاً).

أي نحسب:

$$Z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

د. للحصول على الحد الأدنى لتقدير النسبة نطرح حاصل الضرب (السابق) من نسبة العينة $\hat{P}$ وللحصول على الحد الأعلى نجمع حاصل الضرب مع النسبة في العينة فنحصل على فترة تقدير النسبة، وفي النهاية تكون فترة تقدير النسبة على الصورة التالية:

$$P = \hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

مثال (5- 6):

سحبت عينة حجمها 121 شخصاً من مدينة من مدن المملكة العربية السعودية، فوجد أن عدد الذكور في تلك العينة هو 50، أوجد فترة تقدير لنسبة الذكور في المدينة ككل بدرجة ثقة 95% ؟

الحل:

نحسب أولاً نسبة الذكور في العينة $\hat{P}$ ونحصل عليها بقسمة عدد الذكور في العينة على حجم العينة أي أن:

$$\hat{P} = \frac{50}{121} = 0.41$$

وحيث أن درجة الثقة المطلوبة هي 95% فإن معامل الثقة المناسب هو $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$ ، وفترة تقدير نسبة الذكور في هذه المدينة تحسب من العلاقة:

$$P = \hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}$$

وبالتعويض عن:

$$Z_{0.025} = 1.96, 1 - \hat{P} = 1 - 0.41 = 0.59, \hat{P} = 0.41, n = 121$$

نحصل على:

$$\begin{aligned} P &= 0.41 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.41 \times 0.59}{121}} \\ &= 0.41 \pm 0.045 \end{aligned}$$

$$\therefore P \begin{cases} 0.37 \\ 0.455 \end{cases}$$

أي أن نسبة الذكور في مجتمع الدراسة (المدينة) تتراوح ما بين 0.37، 0.455 وذلك بدرجة ثقة 95 %، أي أن نسبة الذكور في هذه المدينة لا تتجاوز 46 % بنسبة خطأ 5 %.

2.5.5 حجم المجتمع صغير

في البند السابق تم حساب التقدير الإحصائي للنسبة في مجتمع إحصائي كبير الحجم، وفي هذا البند سنناقش الحالة عندما يكون حجم المجتمع الإحصائي صغير، ففي هذه الحالة يتم حساب فترة تقدير النسبة P من العلاقة التالية:

$$P = \hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

حيث N تمثل حجم المجتمع.

مثال (5- 7):

سحبت عينة حجمها 121 شخصاً من مجتمع يتكون من 500 شخص، فوجد أن عدد الذكور في تلك العينة هو 50، أوجد فترة تقدير لنسبة الذكور في هذا المجتمع بدرجة ثقة 95% ؟

الحل:

حيث أن نسبة الذكور فى العينة $\hat{P} = 0.41$ ، $Z_{0.025} = 1.96$ ، $N = 500$ ، $1 - \hat{P} = 0.59$ (انظر مثال 5 - 6)،

فتحسب فترة تقدير نسبة الذكور فى هذا المجتمع من العلاقة:

$$P = \hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

$$\therefore P = 0.41 \pm 0.045 \times \sqrt{\frac{500 - 121}{499}}$$

$$= 0.41 \pm 0.045 \times 0.76$$

$$= 0.41 \pm 0.034$$

$$\therefore P \begin{cases} 0.376 \\ 0.444 \end{cases}$$

أي أن نسبة الذكور فى المجتمع تتراوح بين 0.376، 0.444 وذلك بدرجة ثقة % 95، أى أن نسبة الذكور فى هذا المجتمع لا تتجاوز 54% بنسبة خطأ % 5.

حساب حجم العينة عند تقدير النسبة:

يعتبر تحديد حجم العينة المناسب من المشاكل المهمة والشائعة التي تواجه الباحثين في مختلف المجالات ويختلف تحديد حجم العينة باختلاف الهدف من التقدير، ويتحدد حجم العينة باستخدام النسبة بنفس الطريقة التي استخدمت في حالة الأوساط الحسابية، مع اختلاف الصيغ الرياضية، فيمكن تحديد حجم العينة

اللازمة للحصول على درجة ثقة معينة عند تقدير النسبة في المجتمع بافتراض أن أقصى خطأ في التقدير مسموح به هو d تبعاً للمعادلة التالية:

$$d \geq Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}$$

مثال (5- 8):

يدّعي أحد الدارسين لظاهرة التدخين في دولة ما أنه عند دراسته لنسبة المدخنين بأن نتائج دراسته هي من الدقة بحيث لا يتعدى نسبة الخطأ في التقدير 2%، فما هو حجم العينة المناسب التي نستطيع من خلالها الحكم على مدى صحة إدعاء هذا الدارس بافتراض أن نسبة المدخنين 50 % وذلك بدرجة ثقة 95 %.

الحل:

بما أن درجة الثقة 95 % فإن $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$ بافتراض أن نسبة المدخنين $\hat{P} = 0.5$ فيكون: $1 - \hat{P} = 0.5$

وحيث أن أقصى خطأ مسموح به هو: $d = |P - \hat{P}| = 0.02$ ، فإن حجم العينة اللازم يتحدد من العلاقة:

$$d \geq Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}$$

$$\therefore d^2 \geq (Z_{\alpha/2})^2 \left(\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n} \right)$$

$$\therefore n \geq \frac{(Z_{\alpha/2})^2 (\hat{P}(1 - \hat{P}))}{d^2}$$

$$\therefore n = \frac{(1.96)^2 \times 0.5 \times 0.5}{(0.02)^2} = \frac{0.9604}{0.0004} = 2401$$

أي أن حجم العينة المناسب الذي يعطي درجة الدقة المطلوبة هو 2401 شخص، بمعنى آخر فإن على الدارس فحص عينة حجمها عينة لا يقل عددها عن هذا العدد.

6.5 تقدير فترة الثقة للفرق بين وسطين ونسبتين

أيضاً يمكن بناء فترات الثقة للفرق في الوسط الحسابي أو النسبة بين عینتين لتقدير الفرق بين المجتمعين في حالة التوزيع الطبيعي، وذلك باستعمال نفس الساليب السابقة واستخدام توزيعات المعاينة الواردة في الفصل السابق كالآتي:

أولاً: الفرق بين وسطين:

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة عشوائية بسيطة حجمها n_1 أخذت من مجتمع إحصائي يخضع لتوزيع طبيعي وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 ، وكانت $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ عينة عشوائية بسيطة حجمها n_2 أخذت من مجتمع إحصائي