

الباب الثالث:

نظرية المعادلات

نظرية المعادلات Theory of Equations

3.1 كثيرات الحدود من الدرجة n

3.2 المعادلة الجبرية من الدرجة n

3.3 العمليات الجبرية على كثيرات الحدود

3.4 نظريتا الباقي والعوامل

3.5 النظرية الأساسية في علم الجبر

3.6 قاعدة ديكارت للإشارات

3.7 العلاقة بين عوامل وجذور المعادلة

نظرية المعادلات

3

في الباب السابق تعرفنا على معادلات الدرجة الأولى ومعادلات الدرجة الثانية في مجهول (متغير) واحد، في هذا الباب سوف نتعرف على معادلات من درجات أعلى، وسندرس بتوسع المعادلات الجبرية ونقصد بها المعادلات التي تخضع لعمليات الجبر العادية من جمع وطرح وضرب، ونتعرف على كيفية إيجاد جذورها (حلولها) والنظريات التي تتعلق بهذا الموضوع.

مفاهيم وتعريف أساسية:

3.1 كثيرة الحدود من الدرجة n Polynomial of nth Degree

ويرمز لها $P(x)$ وهي تجمع من الحدود التي تحتوي على القوى الصحيحة الموجبة للمتغير x وتأخذ الشكل العام الآتي:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (1)$$

وحيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ أعداد حقيقية تسمى معاملات كثيرة الحدود

(coefficients of polynomial)

، وبشرط $a_n \neq 0$ ويسمى a_n المعامل الأول

وعادة ترتب الحدود بشكل تنازلي أو تصاعدي وذلك وفقاً لقوى x

درجة كثيرة الحدود Degree of polynomial

n : وهي أكبر أس (أكبر قوة) للمتغير x يظهر في كثيرة الحدود ، ويقال أن

$p_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n أو من الدرجة النونية .

ملاحظة مهمة

يجب أن تكون قوى x أعداداً صحيحة موجبة، خلاف ذلك لن تكون كثيرة حدود .

تصنيف كثيرات الحدود:

تصنف كثيرات الحدود تبعاً لدرجتها، مثلاً:

1- كثيرة حدود من الدرجة الصفرية على الصورة $P(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت،

وتسمى أيضاً كثيرة حدود ثابتة لأنه لا تظهر فيها x أبداً ومعنى ذلك أن x^0 .

مثال على ذلك:

$$p(x) = 7 , \quad p(x) = \frac{1}{3} , \quad p(x) = -2 , \dots$$

2- كثيرة حدود من الدرجة الأولى:

أي أن أعلى قوة لـ x هي 1 ، و صورتها العامة

$$P_1(x) = ax + b \quad \text{أو} \quad P_1(x) = a_1x + a_0$$

مثلاً

$$p(x) = 2x + a , \quad f(x) = -6x + 1, \quad g(x) = 5x$$

3- كثيرة حدود من الدرجة الثانية:

2 أعلى قوة فيها للمتغير ، وهي على الصورة العامة

$$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{أو} \quad p_2(x) = ax^2 + bx + c$$

مثلاً:

$$p(x) = 5x^2 - 3x + 8$$

$$p(x) = 3x^2 - 5$$

4- كثيرة حدود من الدرجة الثالثة:

$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

مثلاً:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3$$

$$p(x) = 2x^3 + 4x - 1, \quad p(x) = x^3 - 1, \quad p(x) = 10x^3$$

ملاحظة:

1- لا يشترط أن يكتب رمز (مسمى) كثيرة الحدود، فأحياناً تكتب بدونه، مثلاً:

$$x^3 + 4x^2 - x + 10$$

2- لا يشترط أيضاً أن تكتب كثيرة الحدود مرتبة في صورتها العامة، ونقوم بترتيب حدودها إن لزم الأمر مثلاً:

$$5 - 3x^2 + x - 2x^3$$

هذه كثيرة حدود من الدرجة الثالثة، ونلاحظ أنها غير مرتبة وسنرتبها تنازلياً كالاتي:

$$-2x^3 - 3x^2 + x + 5$$

مع ملاحظة نقل الحد بإشارته عند إعادة الترتيب.

مثال 1

فيما يلي بين كثيرة الحدود من غيرها واذكر درجتها:

$$1) x^3 - 2x^{-2} + 1$$

$$2) \sqrt{x} + 3x^2 + x - 4$$

$$3) x^3 + 5x - 2$$

$$4) 3x^4 - \frac{2}{x^3} + 5$$

$$5) \sqrt{3}x^4 - 2x^2 + 1$$

$$6) \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

الحل:

1) $x^3 + 2x^{-2} + 1$

ليست كثيرة حدود لأن أس المتغير في الحد الثاني عدد سالب.

2) $\sqrt{x} + 3x^2 + x - 4$

ليست كثيرة حدود لأن المتغير في الحد الأول تحت الجذر.

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ لاحظ أن الجذر عبارة عن أس كسري وليس عدد صحيح موجب

3) $x^3 + 5x - 2$

كثيرة حدود من الدرجة الثالثة: (جميع قوى المتغير أعداد صحيحة موجبة)

4) $3x^4 - \frac{2}{x^3} + 5$

ليست كثيرة حدود لأن المتغير في الحد الثاني في المقام، لاحظ أن المقام يعتبر أس سالب:

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

5) $\sqrt{3}x^4 - 2x^2 + 1$

كثيرة حدود من الدرجة الرابعة جميع قوى x أعداد صحيحة موجبة

6) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

كثيرة حدود من الدرجة الأولى.

3.2 المعادلة الجبرية من الدرجة النونية: Equation of nth degree

إذا ساوينا كثيرة الحدود (1) بالصفر أي $P_n(x) = 0$

ستصبح معادلة جبرية من الدرجة n على الصورة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (2)$$

وتسمى معادلة من الدرجة n أو الدرجة النونية.

ملاحظات:

- 1- المعادلة (2) هي معادلة في متغير (مجهول) واحد فقط وهو x .
- 2- القيم الحقيقية $a_n, \dots, a_0$ تسمى معاملات المعادلة Coefficients of equation.
- 3- حل المعادلة (2) هو قيم x التي تحقق المعادلة، وتسمى حلول أو جذور (roots) المعادلة، وتسمى أيضاً أصفار (zeros) كثيرة الحدود، هذه الحلول (الجذور، الأصفار) قد تكون أعداداً حقيقية وقد تكون أعداداً مركبة.
- 4- يوجد علاقة وثيقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها، كذلك يوجد علاقة بين درجة المعادلة وعدد جذورها.

وقبل أن نتطرق لنظريات وطرق إيجاد جذور المعادلة الجبرية سوف نتعرف أولاً على العمليات الجبرية على كثيرات الحدود وبعض النظريات الهامة على هذه العمليات.

3.3 العمليات الجبرية على كثيرات الحدود:

-1 جمع وطرح كثيرات الحدود:

يتم تجميع الحدود المتشابهة أي التي لها نفس الأس، وتجمع أو تطرح معاملاتها سواء أفقياً أو رأسياً.

مثلاً:

$$p(x) = 4x^2 + 3x - 5 \quad , \quad g(x) = 2x^2 - 6x + 1 \quad ,$$

$$p(x) + g(x) \quad \text{أوجد:}$$

بطريقة أفقية:

$$\begin{aligned} p(x) + g(x) &= 4x^2 + 3x - 5 + 2x^2 - 6x + 1 \\ &= (4x^2 + 2x^2) + (-6x + 3x) + (-5 + 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(x) + g(x) = 6x^2 - 3x - 4.$$

وبطريقة رأسية:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x - 5 \\ + \quad 2x^2 - 6x + 1 \\ \hline 6x^2 - 3x - 4 \end{array} \quad \text{يتم ترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها رأسياً:}$$

وبالمثل عملية الطرح:

$$\begin{aligned} p(x) - g(x) &= 4x^2 + 3x - 5 - (2x^2 - 6x + 1) \\ &= (4x^2 - 2x^2) + (3x + 6x) + (-5 - 1) \\ &= 2x^2 + 9x - 6. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x - 5 \\ - \quad 2x^2 - 6x + 1 \\ \hline 2x^2 + 9x - 6 \end{array}$$

ملاحظة:

عملية الطرح ليست إبدالیه أي أن:

$$p(x) - g(x) \neq g(x) - p(x)$$

تأكد من ذلك وأوجد ناتج $g(x) - p(x)$

2- ضرب كثيرات الحدود:

يضرب كل حد من كثيرة الحدود في جميع حدود كثيرة الحدود الأخرى ونستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع (الطرح) وقوانين جمع الأسس ثم تجميع الحدود المتشابهة. ويمكن أن تتم عملية الضرب أفقياً أو رأسياً

مثال:

لکثیرتي الحدود $p(x) = 4x + 1$, $f(x) = 2x^2 - 6x - 5$ أوجد $p \cdot f$

أفقياً باستخدام قانون التوزيع:

$$\begin{aligned} p(x) \cdot f(x) &= (4x + 1) \cdot (2x^2 - 6x - 5) \\ &= 4x \cdot 2x^2 + 4x \cdot (-6x) + 4x \cdot (-5) + 1 \cdot (2x^2) + 1 \cdot (-6x) \\ &\quad + 1 \cdot (-5) \\ &= 8x^3 - 24x^2 - 20x + 2x^2 - 6x - 5 \end{aligned}$$

$$p(x) \cdot f(x) = 8x^3 - 22x^2 - 26x - 5$$

ويمكن أيضاً بطريقة رأسية وهنا يفضل وضع كثير الحدود ذات الدرجة الأكبر في الصف الأول ثم
تجرى عملية الضرب مثل ضرب الأعداد:

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 6x - 5 \\
 \times \quad 4x + 1 \\
 \hline
 8x^3 - 24x^2 - 20x \\
 2x^2 - 6x - 5 \\
 \hline
 = 8x^3 - 22x^2 - 26x - 5
 \end{array}$$

-3- قسمة كثيرات الحدود:

تقسم كثيرة الحدود ذات الدرجة الأكبر على كثيرة حدود من درجة أقل أو مساوية لها في الدرجة.
وبطريقة مشابهة لقسمة الأعداد قد تنتهي القسمة بدون باق وقد ينتج عن القسمة باق، وتكتب
نتيجة القسمة بنفس الطريقة أيضاً لقسمة الأعداد.

مثلاً:

$$15 \div 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 15 = (3) \cdot (5)$$

$$11 \div 2 = 5, \text{ الباقي } 1 \quad \Rightarrow \quad 11 = (2) \cdot (5) + 1$$

11 يسمى المقسوم، 2 المقسوم عليه، 5 خارج القسمة، 1 الباقي وبنفس المسميات أيضاً نستخدمها
في قسمة كثيرات الحدود.

تعريف:

إذا كانت $P(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وكانت $Q(x)$ كثيرة حدود من الدرجة m

وبحيث $m \leq n$ ، فإنه يمكن قسمة $P(x)$ على $Q(x)$

$$p(x) = H(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad (3)$$

↓ الباقي
 ↓ المقسوم عليه
 ↓ خارج القسمة
 ↓ المقسوم

حيث:

$H(x)$ خارج القسمة وهي كثيرة حدود من الدرجة $(n - m)$

$R(x)$ باقي القسمة وهي كثيرة حدود درجتها أقل من $(n - m)$

لاحظ أن شرط عملية القسمة أن تكون درجة المقسوم أكبر من درجة المقسوم عليه

تتم عملية قسمة كثيرات الحدود بعدة طرق من أشهرها طريقة القسمة المطولة ، وطريقة القسمة التركيبية وسنوضحها بالتفصيل فيما يلي:

- طريقة القسمة المطولة:

مثال (1):

أوجد ناتج قسمة $x^2 + 7x + 12$ على $x + 3$

الحل:

المقسوم عليه	$x + 4$	خارج القسمة
$x + 3$	$x^2 + 7x + 12$	المقسوم
$ \begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \\ - (x^2 + 3x) \\ \hline 4x + 12 \\ - (4x + 12) \\ \hline 0 \quad 0 \end{array} $		
		باقي القسمة

خارج القسمة: $x + 4$

باقي القسمة: 0

ونكتب ذلك بالشكل:

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$$

مثال (2):

أوجد ناتج قسمة كثيرة الحدود $x^3 + 4x + 4$ على $x + 1$

الحل:

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 5 \\
 x + 1 \overline{) x^3 + 4x + 4} \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 -x^2 + 4x + 4 \\
 \underline{-(-x^2 - x)} \\
 5x + 4 \\
 \underline{-(5x + 5)} \\
 -1
 \end{array}$$

خارج القسمة $x^2 - x + 5$

باقي القسمة: -1

نكتب ذلك:

$$x^3 + 4x + 4 = (x^2 - x + 5)(x + 1) - 1$$

مثال (3):

أوجد ناتج قسمة $4x^2 + x - 3$ على $x - 2$

الحل:

. لا يمكن إجراء عملية القسمة لأن $(x^3 + 4x + 4)$ درجتها أقل من درجة $(x-2)$

القسمة التركيبية: Synthetic Division

وتسمى أيضاً القسمة التركيبية لـ هورنر (Horner's Division)

وهي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود من الدرجة n على ثنائية حد بالشكل $(x - r)$

حيث r عدد حقيقي ، وتتم هذه العملية في ثلاثة أسطر فقط.

خطوات القسمة التركيبية:

- 1- يجب أن يكون المقسوم عليه في الصورة $(x - r)$ أولاً.
- 2- نرتب كثيرة الحدود تنازلياً بحسب درجتها، ثم نكتب معاملاتها مرتبة في أعمدة في السطر الأول، والحدود غير الموجودة نضع معاملها (0) ثم نرسم خطاً رأسياً من الناحية اليسرى، وعلى يساره نكتب r .
- 3- يترك السطر الثاني فارغاً مؤقتاً ثم يوضع خط أفقي.
- 4- في السطر الثالث تحت الخط الأفقي يكتب المعامل الأول a_n (معامل x^n) في نفس العمود الأول يمين الخط الرأسى.
- 5- يضرب المعامل a_n في r ويكتب الناتج في السطر الثاني تحت المعامل الثاني ثم يجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني ويكتب ناتج الجمع في نفس العمود على السطر الثالث.
- 6- يضرب ناتج الجمع في السطر الثالث في r ونكرر الخطوة (5) السابقة الى أن نصل الى ناتج جمع العددين في آخر عمود.
- 7- الأعداد الناتجة في أعمدة الصف الثالث ما عدا العمود الأخير، تمثل معاملات خارج القسمة وهي كثيرة حدود درجتها تحديداً $(n-1)$.
- 8- العدد في العمود الأخير من الصف الثالث يمثل باقي القسمة، وإذا كان مساوياً للصفر معناها أن القسمة بدون باق.
- 9- الناتج النهائي من قسمة $P_n(x)$ على $(x - r)$ يكتب بالشكل:

$$P_n(x) = (x - r)P_{n-1}(x) + R \quad (4)$$

مثال (4):

باستخدام القسمة التركيبية اقسم $x^3 + 4x + 4$ على $x + 1$

الحل:

في مثال (2) أوجدنا الناتج باستخدام القسمة المطولة وسنستخدم هنا القسمة التركيبية ونوضحها بالتفصيل كالآتي:

1- نضع المقسوم عليه $x + 1$ في الصورة $x - r$

$$\Rightarrow x + 1 = x - (-1) \Rightarrow r = -1$$

2- نرتب كثيرة الحدود تنازلياً، والحد غير الموجود نضع معاملته (0).

$$x^3 + 0x^2 + 4x + 4$$

-1	1	0	4	4

3- نرتب المعاملات في أعمدة كالآتي:

نضع خطأ رأسياً على اليسار ونكتب قيمة $r = -1$

ثم نترك سطرًا ونرسم خطأ أفقياً.

-1	1	0	4	4

4- ننزل المعامل الأول (1) في السطر الثالث في مكانه

بنفس العمود ثم نضربه في (-1) ونضع الناتج

السطر الثاني في العمود الثاني.

-1	1	0	4	4
		-1	1	
	1	-1		

5- نجمع العمود الثاني ويكتب ناتج الجمع في

السطر الثالث.

6- الآن نضرب (-1) في السطر الثالث بـ $r = -1$

ونضع ناتج الضرب في السطر الثاني في العمود الثالث ونكرر نفس الخطوات السابقة.

-1	1	0	4	4
		-1	1	
	1	-1	5	

7- نضرب (5) الآن في (-1) ونضع الناتج على

السطر الثاني في العمود الرابع ثم نجمع العمود الرابع.

-1	1	0	4	4
		-1	1	-5
	1	-1	5	-1

إذا انتهت جميع الأعمدة انتهت عملية القسمة.

ننظر الآن للصف الثالث:

نقرأ الأعداد في الصف الثالث من اليسار إلى اليمين:

العدد الأخير في العمود الأخير يمثل باقي القسمة والأعداد التي تسبقه هي معاملات خارج القسمة وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية (لماذا؟)

-1	1	0	4	4
		-1	1	-5
	1	-1	5	-1

خارج القسمة:

معاملات خارج القسمة

$$x^2 - x + 5$$

باقي القسمة: -1

ونكتب الناتج النهائي:

$$x^3 + 4x + 4 = (x + 1)(x^2 - x + 5) + (-1)$$

مثال (5):

باستخدام القسمة التركيبية أوجد ناتج قسمة $3x^3 - 8x^2 + 11x - 14$ على $x - 2$

الحل:

$$x - r = x - 2 \Rightarrow r = 2$$

مباشرة نطبق خطوات القسمة التركيبية

2	3	-8	11	-14
		6	-4	14
	3	-2	7	0

خارج القسمة من الدرجة الثانية

$$3x^2 - 2x + 7$$

باقي القسمة = 0

أي أن:

$$3x^3 - 8x^2 + 11x - 14 = (x - 2)(3x^2 - 2x + 7)$$

مثال (6):

باستخدام القسمة التركيبية أوجد ناتج قسمة $x^3 - 6x^2 + 10x - 12$ على $x + 3$

الحل:

$$x - r = x + 3 \Rightarrow r = -3$$

-3	1	-6	10	-12
		-3	27	-111
	1	-9	37	-123

خارج القسمة من الدرجة الثانية

$$x^2 - 9x + 37$$

باقي القسمة = -123

أي أن:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 12 = (x + 3)(x^2 - 9x + 37) - 123$$

إذا كان المقسوم عليه الصورة $(ax - b)$

الشرط لقسمة كثيرة الحدود $p_n(x)$ على $ax - b$ باستخدام القسمة التركيبية

هو أن يكون معامل x في المقسوم عليه يساوي 1 لذلك نتخلص من المعامل a بطريقتين:

1- الطريقة الأولى: نقسم جميع حدود $p_n(x)$ و $(ax - b)$ على a ، يصبح لدينا كثيرة

حدود جديدة ومقسوم عليه جديد $(x - \frac{b}{a})$ أي أن $r = \frac{b}{a}$ ويكون الناتج النهائي بعد

القسمة التركيبية:

$$\frac{1}{a}p_n(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)p_{n-1}(x) + \frac{R}{a}$$

$$\Rightarrow p_n(x) = a\left(x - \frac{b}{a}\right)p_{n-1}(x) + R$$

2- الطريقة الثانية:

نأخذ a عاملاً مشتركاً فيصبح المقسوم عليه بالشكل $a(x - \frac{b}{a})$

ثم نقسم p_n على $(x - \frac{b}{a})$ والناتج النهائي للقسمة

$$p_n(x) = (ax - b) \cdot \frac{p_{n-1}(x)}{a} + R$$

مثال:

باستخدام القسمة التركيبية أوجد ناتج قسمة $4x^3 + x + 1$ على $(2x - 1)$

الحل:

المقسوم عليه $(2x - 1)$ ، $(ax + b)$ ، إذاً يجب التخلص من معامل x

الطريقة الأولى: نقسم على 2 كلاً من $(2x - 1)$ ، $p(x)$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{2} = \frac{4x^3 + x + 1}{2} = 2x^3 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{(2x-1)}{2} = x - \frac{1}{2} = (x-r) \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

نقسم كثيرة الحدود الجديدة على المقسوم عليه الجديد :

$\frac{1}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
		1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
			$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	2	1	1	1

ينتج

$$2x^2 + x + 1 \text{ خارج القسمة:}$$

$$\frac{R}{2} = 1 \Rightarrow R = 2 \text{ باقى القسمة:}$$

$$\frac{p_n(x)}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + x + 1) + 1$$

$$\Rightarrow p_n(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + x + 1) + 2$$

$$= (2x-1)(2x^2 + x + 1) + 2$$

الطريقة الثانية:

نأخذ 2 عامل مشترك من $(2x-1)$

$$\Rightarrow (2x-1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

نقسم كثيرة الحدود المعطاة على $\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$p_{n-1}(x) = (4x^2 + 2x + 2)$$

خارج القسمة:

$\frac{1}{2}$	4	0	1	1
		2	1	1
	4	2	2	2

$$\Rightarrow \frac{1}{2}p_{n-1}(x) = 2x^2 + x + 1$$

$$R = 2 \text{ باقى القسمة:}$$

ونكتب الناتج:

$$p_n(x) = (2x-1).(2x^2 + x + 1) + 2$$

وهو نفس الناتج بالطريقتين.

3.4 نظريتا الباقي والعوامل: *The Remainder and Factors Theorems*

نظرية الباقي: *The Remainder Theorem*

إذا قسمت كثيرة الحدود $p_n(x)$ على $(x - r)$ فإن باقي القسمة R مقدار ثابت ويساوي $p_n(r)$

$$R = P_n(r)$$

$$p_n(x) = (x - r) \cdot p_{n-1}(x) + R \quad \text{وحيث}$$

معنى ذلك أن التعويض المباشر بقيمة r في كثيرة الحدود p_n سيعطي مباشرة باقي القسمة .

هذه النظرية تفيدنا في معرفة باقي القسمة مباشرة دون إجراء خطوات القسمة ونستخدمها إذا كان هدفنا معرفة الباقي فقط بدون معرفة خارج القسمة.
وبرهان هذه النظرية سهل جداً:

$$p_n(x) = (x - r) \cdot p_{n-1}(x) + R$$

وبالتعويض المباشر عن $x = r$

$$\Rightarrow p_n(r) = (r - r) \cdot p_{n-1}(r) + R$$

$$\Rightarrow p_n(r) = R$$

مثال (1):

بدون إجراء عملية القسمة أثبت أن باقي قسمة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 + 4x + 4$

على $x + 1$ يساوي -1

الحل:

$$(x - r) = x + 1 \Rightarrow r = -1$$

$$R = p(r) = p(-1) \quad \text{باستخدام نظرية الباقي:}$$

$$\Rightarrow (-1)^3 + 4(-1) + 4 = -1 - 4 + 4 = -1$$

$$\Rightarrow R = -1$$

وهو المطلوب.

مثال (2):

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة $x^3 - 5x - 3$ على $x - 2$

الحل:

$$(x - 2) = x - r \Rightarrow r = 2$$

من نظرية الباقي:

$$R = p(r)$$

$$\Rightarrow R = p(2) = 2^3 - 5(2) - 3$$

$$= 8 - 10 - 3 = -5$$

$$R = -5$$

الباقي

مثال (3):

اختبر هل يوجد باقي لقسمة كثيرة الحدود $p(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 12$ على $x - 4$

أم لا؟

الحل:

$$(x - r) = x - 4 \Rightarrow r = 4$$

$$R = p(4)$$

$$= 4^3 - 7(4^2) + 7(4) + 12$$

$$= 64 - 7(16) + 28 + 12 = -8$$

وبالتالي الباقي

$$R = -8$$

مثال (4):

أوجد قيمة k التي تجعل باقي القسمة لكثيرة الحدود $x^2 + 5x + 7$ على $x - k$ يساوي 3.

الحل:

$$R = p(r)$$

من نظرية الباقي

$$x - r = x - k \Rightarrow r = k$$

$$k = 3 \Rightarrow p(k) = 3$$

من المعطيات

$$\Rightarrow k^2 + 5k + 7 = 3$$

: معادلة من الدرجة الثانية في k تحل بإحدى الطرق (القانون العام أو التحليل)

$$k^2 + 5k + 4 = 0$$

$$(k + 4)(k + 1) = 0$$

$$k = -4 \quad \text{or} \quad k = -1$$

وهذه هي قيم k التي تجعل باقي القسمة يساوي 3

وهو المطلوب.

نظرية العوامل: The Factors Theorem

يقال أن $(x - r)$ عاملا من عوامل كثيرة الحدود $P_n(x)$ إذا وفقط إذا كان $P_n(r) = 0$ هذا يعني أنه إذا انتهت عملية قسمة $P_n(x)$ على $(x - r)$ بدون باقي فإن $(x - r)$ يعتبر عاملا لكثيرة الحدود ونكتب :

$$P_n(x) = (x - r)P_{n-1}(x)$$

ويقال أن $P_n(x)$ قابلة للتحويل إلى عوامل .

ملاحظات

1. معرفة عوامل كثيرة الحدود يساعدنا في إيجاد جذور المعادلة $P(x) = 0$.
2. العامل $(x - r)$ يسمى عاملا أوليا لأنه لا يمكن تحليله إلى درجة أقل من 1 .
3. $P_{n-1}(x)$ يسمى أيضا عاملا لكثيرة الحدود ولكن ليس بالضرورة أوليا وربما يمكن تحليله إلى عوامل من درجة أقل.

مثلا:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x^2 + 3x + 2)$$

عامل أولي

عامل غير أولي

يمكن تحليله مرة أخرى

$$= (x - 1)(x + 2)(x + 1)$$

مثال آخر:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$

لاحظ أن $(x - 1)$ عامل أولي من الدرجة الأولى.

وكذلك $(x^2 + 1)$ عامل أولي من الدرجة الثانية لا نستطيع تحليله لأنه لا يوجد عددين حقيقيين ضربهما 1 وجمعهما 0 .

4- إذا كان $(x - r)$ عاملا لكثيرة الحدود فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة كثيرة

الحدود على $(x - r)$ ، وخارج القسمة $P_{n-1}(x)$ هو عامل آخر.

مثال 1 :

حدد ما إذا كان $(x - 2)$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ أم لا ثم أوجد عواملها الأخرى إن وجدت.

الحل :

باستخدام نظرية العوامل : يكون $(x - 2)$ عاملاً إذا كان $P(2) = 0$ لذلك نحسب $P(2)$ بالتعويض المباشر عند $x = 2$ في كثيرة الحدود :

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 - 7(2)^2 + 4(2) + 12 \\ &= 8 - 28 + 8 + 12 = 0 \end{aligned}$$

باقي القسمة بالفعل $= 0$ وبالتالي $(x - 2)$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود لإيجاد بقية العوامل نقسم $P(x)$ على $(x - 2)$

2	1	-7	4	12
		2	-10	-12
	1	-5	-6	0

خارج القسمة $x^2 - 5x - 6$

ويمكن تحليله أيضاً إلى عاملين حيث $x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$ وبالتالي:

$$P(x) = (x - 2)(x - 6)(x + 1)$$

أي أن $P(x)$ لها ثلاث عوامل أولية.

مثال 2:

حدد ما إذا كان $(x + 2)$ عاملاً لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$.

الحل :

$$x - r = x + 2 \quad \text{باستخدام نظرية العوامل}$$

$$\Rightarrow r = -2$$

نختبر $P(-2)$:

$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 10(-2) - 8$$

$$= -8 - 4 + 20 - 8 = 0$$

$$\therefore P(-2) = 0$$

إذن $(x + 2)$ عاملاً لكثيرة الحدود المعطاه $P(x)$.

مثال 3:

هل $(x + 1)$ عاملاً لكثيرة الحدود $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

الحل :

$$x - r = x + 1 \Rightarrow r = -1 \quad \text{باستخدام نظرية العوامل}$$

نختبر $P(-1)$

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$

$$= -1 + 3 + 2 = 4 \neq 0$$

$$\therefore P(-1) \neq 0$$

إذن $(x + 1)$ ليس عاملاً لكثيرة الحدود المعطاه.

وبعد أن تعرفنا على العمليات الجبرية على كثيرة الحدود، سنتعرف الآن على كيفية إيجاد جذور المعادلة من الدرجة " n "

تذكر أن: $P(x)$ كثيرة حدود ، بينما $P(x) = 0$ هي معادلة.

أصفار كثيرة الحدود وجذور المعادلة

قيم x التي تجعل كثيرة الحدود $P(x)$ مساوية للصفر تسمى أصفار (Zeros) كثيرة الحدود وتسمى أيضاً جذور (roots) أو حلول المعادلة $P(x) = 0$

علاقة العوامل والأصفار والجذور

إذا كانت

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

كثيرة حدود من الدرجة n ،

وكانت المعادلة من الدرجة n $P(x) = 0$ أي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

فإن العبارات التالية متكافئة :

(1) $(x - r)$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود .

(2) r صفراً لكثيرة الحدود $P(x)$

(3) r جذراً (حلاً) للمعادلة $P(x) = 0$

وعند حل معادلة في مجهول واحد من الدرجة " n " من الممكن أن يكون لها جذر حقيقي واحد أو أكثر ، وقد لا توجد لها جذور حقيقية أي أن الجذور قد تكون أعداد مركبة ، لهذا يمكن القول أن أي معادلة من الدرجة " n " لها جذر مركب واحد على الأقل وهذه هي النظرية الأساسية في علم الجبر .

3.5 النظرية الأساسية في علم الجبر

كل معادلة جبرية من الدرجة " n " لها على الأقل جذر واحد .

نتيجة (1) :

كل معادلة جبرية من الدرجة (n) لها على وجه التحديد (n) من الجذور (سواء حقيقية أو مركبة) بما في ذلك الجذور المكررة .

معنى هذا أن معادلة الدرجة الأولى لها جذر (حل) واحد فقط
معادلة الدرجة الثانية لها (جذرين) فقط ولا يمكن أن يكون لها 3 جذور مثلاً.
معادلة الدرجة الثالثة لها (3 جذور) وهكذا.

نتيجة (2) :

المعادلة $P(x) = 0$ من الدرجة n يمكن أن تكتب على الصورة

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n) = 0$$

حيث $r_1, r_2, \dots, r_n$ جذور المعادلة

مثال 1 :

أوجد المعادلة التي جذورها 1 , -2 , -1

الحل :

بما أن لدينا 3 جذور إذاً المعادلة من الدرجة الثالثة ، وحسب النتيجة (2) يمكن أن نكتب المعادلة

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

$$= (x - (-1))(x - (-2))(x - 1) = 0$$

$$= (x + 1)(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$= (x^2 + 3x + 2)(x - 1) = 0$$

نضرب الأقواس ببعضها

$$\Rightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة.

مثال 2 :

أوجد المعادلة التي جذورها $\frac{1}{2}$ و 1 جذر مكرر مرتين

الحل :

بما أنه لدينا 3 جذور : $\frac{1}{2}$ ، 1 ، 1 ، إذاً المعادلة من الدرجة الثالثة ، وحسب النتيجة (2) يمكن أن نكتب المعادلة

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

$$P(x) = (x - 1)(x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$= (x^2 - 2x + 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

للتخلص من الكسر

$$= (x^2 - 2x + 1)(2x - 1) = 0$$

نضرب الطرفين في 2

نضرب الأقواس ببعضها

$$\Rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$$

وهي المعادلة المطلوبة

فيما يلي سنحدد نوع الجذور لأي معادلة جبرية من الدرجة n :

نظرية :

إذا كانت $P(x) = 0$ معادلة من الدرجة "n" ذات معاملات حقيقية وكان أحد جذورها عددا مركبا على الصورة $a + ib$ فإن مرافقه $a - ib$ يكون جذرا أيضا لنفس المعادلة .

نظرية :

إذا كانت $P(x) = 0$ معادلة من الدرجة "n" ذات معاملات حقيقية وكان "n" عددا فرديا فإن المعادلة لها جذر حقيقي واحد على الأقل.

لا يمكن مثلا أن نجد معادلة من الدرجة الثالثة جميع جذورها أعداد مركبة لأن كل 2 من الجذور المركبة تكون مترافقة وبالتالي الجذر الثالث يجب أن يكون حقيقي.

3.6 العلاقة بين إشارة معاملات المعادلة وعدد جذورها الحقيقية (قاعدة ديكارت)

عالم الرياضيات الفرنسي الشهير ديكارت اكتشف علاقة بين إشارات معاملات المعادلة

$$P(x) = 0 \text{ وعدد الجذور الحقيقية لها.}$$

قانون ديكارت للإشارات

إذا كانت

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

معادلة من الدرجة "n" ، ومعاملات حدودها $a_n, \dots, a_0$ أعدادا حقيقية فإن :

1. عدد الجذور الحقيقية الموجبة للمعادلة يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود

المعادلة $P(x) = 0$ أو أقل منه بعدد زوجي .

2. عدد الجذور الحقيقية السالبة للمعادلة يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات المعادلة

$P(-x) = 0$ أو أقل منه بعدد زوجي .

3. بناء على معرفتنا بعدد الجذور الحقيقية الموجبة والسالبة نستطيع استنتاج عدد الجذور

المركبة.

ملاحظة هامة

قاعدة ديكارت لا تعطي قيمة جذور المعادلة ولكنها تقدم لنا تصورا عن نوع جذور المعادلة.

مثال 1 :

اذكر العدد الممكن للجذور الحقيقية الموجبة والسالبة والجذور المركبة للمعادلة :

$$2x^3 + 3x - 5 = 0$$

الحل :

بما أن المعادلة من الدرجة الثالثة إذا لها ثلاثة جذور ، سنستخدم قاعدة ديكرت لتحديد نوع الجذور

• إشارة معاملات $P(x)$ هي :

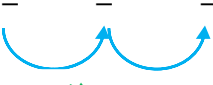
 يوجد تغيير لا يوجد تغيير

يوجد تغيير واحد في الإشارات $\Leftarrow$ يوجد جذر حقيقي موجب واحد فقط

• إشارة معاملات $P(-x)$ هي :

$$P(-x) = 2(-x)^3 + 3(-x) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -2x^3 - 3x - 5 = 0$$


 لا يوجد تغيير لا يوجد تغيير

لا يوجد تغيير في إشارة المعاملات $\Leftarrow$ لا يوجد جذور حقيقية سالبة

وبالتالي نستنتج أن الجذور المتبقية هي جذران مركبان مترافقان

نوع الجذور	حقيقية موجبة +	حقيقية سالبة -	جذور مركبة c	مجموعها
عددها	1	0	2	3

أي أن للمعادلة المعطاة جذر حقيقي موجب واحد ، وجذران مركبان.

مثال 2 :

اذكر العدد الممكن للجذور الحقيقية الموجبة والسالبة والجذور المركبة للمعادلة :

$$x^7 - 3x^4 + 3x^3 - 1 = 0$$

الحل :

بما أن المعادلة من الدرجة السابعة $\Leftarrow$ لدينا 7 جذور بشكل عام.

سنستخدم قاعدة ديكرت للإشارات لتحديد نوع الجذور :



• إشارة معاملات $P(x)$ هي :

يوجد تغيير يوجد تغيير يوجد تغيير

لدينا 3 تغييرات في الإشارة $\Leftarrow$ يوجد 3 جذور حقيقية موجبة أو جذر واحد حقيقي موجب.

• إشارة معاملات $P(-x)$ هي

$$\begin{aligned} P(-x) &= (-x)^7 - 3(-x)^4 + 3(-x)^3 - 1 = 0 \\ &= -x^7 - 3x^4 - 3x^3 - 1 = 0 \end{aligned}$$



لا يوجد تغيير لا يوجد تغيير لا يوجد تغيير

لا يوجد تغيير في إشارة معاملات $P(-x)$ $\Leftarrow$ لا يوجد جذور حقيقية سالبة

وبالتالي الاحتمالات الممكنة للجذور هي :

نوع الجذور	حقيقية موجبة +	حقيقية سالبة -	جذور مركبة c	مجموعها
عددها	3	0	4	7
	1	0	6	7

أي أن للمعادلة: إما 3 جذور حقيقية موجبة و4 جذور مركبة.

أو لها جذر حقيقي موجب واحد و6 جذور مركبة.

مثال 3 :

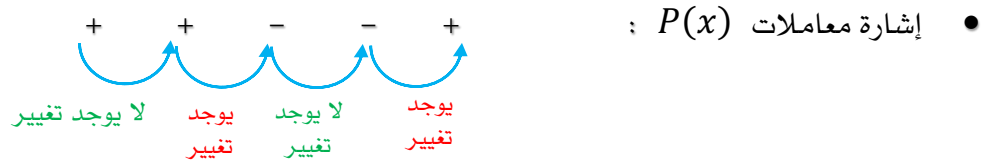
اذكر العدد الممكن للجذور الحقيقية الموجبة والسالبة والجذور المركبة للمعادلة :

$$2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9 = 0$$

الحل:

المعادلة من الدرجة الخامسة إذا لها 5 جذور بشكل عام.

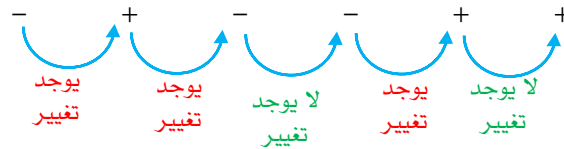
من قاعدة ديكارت نحدد نوع الجذور.



يوجد تغييرين على الإشارة $\Leftarrow$ يوجد جذرين حقيقيين موجبين أو لا يوجد جذور موجبة.

• إشارة معاملات $P(-x)$ هي

$$\begin{aligned} P(-x) &= 2(-x)^5 + (-x)^4 + 3(-x)^3 - 4(-x)^2 - (-x) + 9 = 0 \\ &= -2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 + x + 9 = 0 \end{aligned}$$



يوجد 3 تغييرات في الإشارة $\Leftarrow$ يوجد 3 جذور حقيقية سالبة أو جذر حقيقي سالب واحد

وبالتالي الاحتمالات الممكنة لنوع الجذور هو :

نوع الجذور	حقيقية موجبة	حقيقية سالبة	جذور مركبة	مجموعها
عددها	2	3	0	5
	0	3	2	5
	2	1	2	5
	0	1	4	5

أي أن للمعادلة :

إما : جذران حقيقيان موجبان وثلاثة جذور حقيقية سالبة ولا توجد جذور مركبة.

أو : لها ثلاثة جذور حقيقية سالبة وجذران مركبان فقط.

أو : لها جذران حقيقيان موجبان وجذر حقيقي سالب وجذران مركبان.

أو : لها جذر واحد حقيقي سالب و 4 جذور مركبة.

هذه الاحتمالات الأربعة لجذور المعادلة كلها صحيحة .

النظريات التالية تساعدنا أكثر بمعرفة جذور المعادلة

3.7 العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها

توجد علاقة وطيدة بين معاملات أي معادلة جبرية وجذورها، ولتوضيح الأمر لنأخذ مثلاً معادلة من الدرجة الثالثة

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (i)$$

هذه المعادلة لها 4 معاملات a_3, a_2, a_1, a_0

وحسب النظرية الأساسية في الجبر فإن المعادلة لها 3 جذور نفرض أنها r_1, r_2, r_3

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة كحاصل ضرب عواملها الأولية بالشكل

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0$$

بضرب الأقواس وتجميع الحدود نحصل على :

$$x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)x - r_1r_2r_3 = 0 \quad (ii)$$

المعادلة (ii) هي نفسها المعادلة (i) بعد قسمتها على a_3

بمقارنة المعاملات في المعادلتين نجد أن:

$$\text{مجموع الجذور ضرب } (-1) = \frac{a_2}{a_3} = -(r_1 + r_2 + r_3) \quad \text{معامل } x^2$$

$$\text{مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى} = \frac{a_1}{a_3} = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 \quad \text{معامل } x$$

$$\text{حاصل ضرب الجذور مضروبة في } (-1) = \frac{a_0}{a_3} = -r_1 r_2 r_3 \quad \text{الحد المطلق}$$

وبنفس الطريقة يمكن تعميم النتيجة لأي معادلة من الدرجة n

نظرية:

لأي معادلة من الدرجة n على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

وجذورها: $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$

العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها على النحو الآتي:

$$\text{مجموع جذور المعادلة} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad i.e. \sum_{i=1}^n r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\text{مجموع حاصل ضرب الجذور مثنى مثنى} = \frac{a_{n-2}}{a_n} \quad i.e. \sum_{j=1}^n r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\text{حاصل ضرب كل الجذور} = -\frac{a_0}{a_n} \quad i.e. \prod_{i=1}^n r_i = -\frac{a_0}{a_n}$$

مثال 1 :

أوجد حاصل جمع و ضرب جذور المعادلة $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\text{الحل: تطبيق النظرية مباشرة} \quad \text{مجموع الجذور} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$\text{حاصل ضرب كل الجذور} = -\frac{a_0}{a_n} = -\frac{6}{1} = -6$$

مثال 2:

أوجد جذور المعادلة $x^3 - 3x^2 - 6x + 18 = 0$ إذا علمت أن مجموع جذرين من جذورها يساوي صفر.

الحل :

المعادلة من الدرجة الثالثة إذاً لها ثلاثة جذور نفرض أنها r_1, r_2, r_3

$$r_1 + r_2 = 0 \quad \dots (1) \quad \text{من المعطيات نفرض أن}$$

من النظرية السابقة

$$\text{مجموع الجذور} = -\frac{a_2}{a_3} \Rightarrow \underbrace{r_1 + r_2 + r_3}_{=0} = -\frac{-3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow r_3 = 3 \quad \dots (2)$$

$$\text{ضرب الجذور} = \frac{-a_0}{a_3} \Rightarrow r_1 r_2 r_3 = \frac{-18}{1} = -18$$

$$\Rightarrow 3 r_1 r_2 = -18 \quad \text{من (2)}$$

$$\Rightarrow r_1 r_2 = -6 \quad \dots (3)$$

نحل المعادلتين (1), (3) معاً لإيجاد قيمتي r_1, r_2 كالتالي:

$$r_1 = -r_2 \quad \text{من (1)}$$

نعوض بقيمة r_1 في (3):

$$(-r_2) r_2 = -6$$

$$(r_2)^2 = 6 \Rightarrow r_2 = \pm\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow r_1 = \pm\sqrt{6}$$

الجذور هي

$$3, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$$

وهو المطلوب.

وللتأكد من صحة الحل:

يمكن التعويض في المعادلة بقيمة كل واحد من الجذور ونتأكد من أنها = صفر
أو بطريقة أخرى:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = (x - 3)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$$

$$= (x - 3)(x^2 - 6) = 0$$

$$= (x - 3)(x^2 - 6) = 0$$

$$= x^3 - 3x^2 - 6x + 18 = 0$$

بضرب الأقواس
وترتيب الحدود

هي نفس المعادلة المعطاة. إذاً الحل صحيح.

نظرية

إذا كانت المعادلة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

ومعاملاتها $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداداً صحيحة وكان أحد جذورها عدد نسبي $\frac{p}{q}$ ، فإن p أحد قواسم الحد المطلق a_0 و q أحد قواسم المعامل الأول a_n .

نتيجة

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{للمعادلة}$$

المعادلة التي فيها $a_n = 1$ فإن الجذور الصحيحة للمعادلة تكون قواسم للحد المطلق a_0 .

هذه النتيجة في غاية الأهمية ويمكن اعتبارها طريقة مباشرة لإيجاد جذور معادلة من الدرجة "

n " مع الاستعانة بالنظريات السابقة.

مثال 3:

أوجد جذور (حلول) المعادلة : $x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$

الحل:

معامل x^3 هو (1) وبالتالي يمكن استخدام النتيجة السابقة.

أحد جذور المعادلة هو واحد من قواسم الحد المطلق : ± 1 , ± 2 .

نجرب هذه القيم في المعادلة ، والذي يحققها سيكون جذرا لها .

$$x = 1 : \Rightarrow (1)^3 + 4(1)^2 + 3(1) - 2 = 1 + 4 + 3 - 2 = 6 \neq 0 \quad \text{ليس جذرا}$$

$$x = -1 : \Rightarrow (-1)^3 + 4(-1)^2 + 3(-1) - 2 = -1 + 4 - 3 - 2 = -2 \neq 0 \quad \text{ليس جذرا}$$

$$x = 2 : \Rightarrow (2)^3 + 4(2)^2 + 3(2) - 2 = 8 + 16 + 6 - 2 = 28 \neq 0 \quad \text{ليس جذرا}$$

$$x = -2 : \Rightarrow (-2)^3 + 4(-2)^2 + 3(-2) - 2 = -8 + 16 - 6 - 2 = 0 \quad \text{جذر للمعادلة}$$

$x = -2$ جذر للمعادلة إذاً $(x + 2)$ أحد عوامل المعادلة

نستخدم القسمة لإيجاد بقية العوامل وبالتالي بقية الجذور

-2	1	4	3	-2
		-2	-4	2
	1	2	-1	0

خارج القسم $x^2 + 2x - 1$

يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$$

عندما $x^2 + 2x - 1 = 0$ ، معادلة من الدرجة الثانية نوجد جذورها من القانون العام

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

وبالتالي جذور المعادلة المعطاة هي $-1 + \sqrt{2}$ ، $-1 - \sqrt{2}$ ، -2

مثال 4:

أوجد جذور (حلول) المعادلة : $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

الحل:

المعادلة لها 3 جذور لأنها من الدرجة الثالثة

معامل x^3 هو (1) وبالتالي فإن أحد جذور المعادلة الصحيحة هو أحد قواسم الحد المطلق .

قواسم 24 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$

طبعا لا يمكن أن تكون جميع هذه القواسم جذورا فنبدأ بالتجريب من القيمة الأصغر ونعوض بها في المعادلة

$$x = 1 : \Rightarrow (1)^3 - 3(1)^2 - 10(1) + 24 = 1 - 3 - 10 + 24 = 12 \neq 0 \quad \text{ليس جذرا}$$

$$x = -1 : \Rightarrow (-1)^3 - 3(-1)^2 - 10(-1) + 24 = -1 - 3 + 10 + 24 = 30 \neq 0 \quad \text{ليس جذرا}$$

$$x = 2 : \Rightarrow (2)^3 - 3(2)^2 - 10(2) + 24 = 8 - 12 - 20 + 24 = 0 \quad \text{جذر}$$

(2) جذر للمعادلة أي أن $(x-2)$ عاملا للمعادلة فنوجد بقية العوامل باستخدام القسمة :

2	1	-3	-10	24
		2	-2	-24
	1	-1	-12	0

خارج القسمة $x^2 - x - 12$ ، وبالتالي تكتب المعادلة:

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x^2 - x - 12) = 0$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{إما}$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \text{أو}$$

معادلة من الدرجة الثانية تحل بالتحليل أو بالقانون العام،

سنستخدم التحليل (ممكن القانون العام) $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0$

$$\Rightarrow x = 4, x = -3$$

إذا جذور المعادلة هي $2, 4, -3$

مثال 5.

أوجد حل المعادلة : $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$

الحل:

المعادلة من الدرجة الثالثة إذاً لها ثلاثة جذور

أحد الجذور سيكون من قواسم الحد المطلق : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$
نختبرها القواسم في المعادلة:

$$x = 1 \Rightarrow (1)^3 - (1)^2 - 10(1) - 8 = 1 - 1 - 10 - 8 = -18 \neq 0$$

ليس جذراً

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8 = -1 - 1 + 10 - 8 = 0$$

إذا $x = -1$ هي جذر للمعادلة وبالتالي (X+1) عامل للمعادلة

نستخدم القسمة لإيجاد باقي العوامل

-1	1	-1	-10	-8
		-1	2	8
	1	-2	-8	0

خارج القسمة $x^2 - 2x - 8$,

نحلل خارج القسمة بجعله معادلة صفرية ونوجد جذورها

عندما $x^2 - 2x - 8 = 0$ من القانون العام (أو بالتحليل) لإيجاد جذور المقدار

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} =$$

$$\frac{2+6}{2} = 4, \quad \frac{2-6}{2} = -2$$

وبالتالي جذور المعادلة المعطاة هي $-2, -1, 4$

تمارين

1 - بين كثيرة الحدود من غيرها وبين درجتها

- a) $x^3 + x + 8$ b) $5 + 3x^2 + x$ c) $x^{-3} - 7x - 2$
d) $x^2 - \frac{3}{x} + 5$ e) $\sqrt{3}x^3 - \sqrt{2}x + 9$ f) $3 - \frac{1}{4}x$
g) $x^3 - 2\sqrt{x} + x$ h) $\sqrt{x} + 3x^2 + x - 4$ i) $3x - x^3$
g) $3x^4 - \frac{2}{x^3} + 1$ k) $\sqrt{x^2 + 3x + 2}$ l) $\frac{1}{x} - \frac{3}{2}$

2 - أوجد خارج القسمة والباقي الناتج من قسمة كثيرات الحدود التالية:

- a) $2x^3 + 7x + 9$ على $x - 1$
b) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 9$ على $x - 2$
c) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 9$ على $x + 1$
d) $2x^3 + 7x + 9$ على $x + 2$
e) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 9$ على $2x - 3$
f) $2x^3 - 4x^2 + 7x + 9$ على $2x + 3$

3 - بدون اجراء عملية القسمة أوجد باقي قسمة كثيرات الحدود

- $x^3 - 5x - 3$ على $x - 2$
- $x^3 + 3x^2 - 6x + 11$ على $x - 3$
- $3x^3 - x^2 + x - 5$ على $x + 2$
- $3x^3 - x^2 + x - 5$ على $x + 1$
- $x^4 + x^2 - 3x + 4$ على $x - 3$
- $2x^3 - 2x^2 + x - 1$ على $x - 1$

4 - أوجد قيمة k فيما يلي:

- التي تجعل $(x+2)$ عاملاً $x^3 + 3x^2 - 4x + k$
- التي تجعل $(x-3)$ عاملاً $x^3 + kx^2 + 26x - 24$
- التي تجعل $(x+2)$ عاملاً $x^3 + 8x^2 + kx + 4$
- التي تجعل $(x-2)$ عاملاً $x^3 - 6x^2 + 11x + k$
- التي تجعل $(x-1)$ عاملاً $x^4 + kx^3 + 35x^2 - 50x + 24$

- 5 - إذا كان $(x - 2)$ عاملاً لكثيرة الحدود ، $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ أوجد بقية العوامل .
- 6 - إذا كان $(x - 1)$ عاملاً لكثيرة الحدود ، $x^3 + 2x^2 + x - 4$ أوجد بقية العوامل .
- 7 - إذا كان $(x - 7)$ عاملاً لكثيرة الحدود ، $x^3 - 6x^2 - 13x + 42$ أوجد بقية العوامل
- 8 - إذا كان $(x + 1)$ عاملاً لكثيرة الحدود ، $x^4 - 3x^2 + 2$ أوجد بقية العوامل .

9 - اذكر العدد الممكن للجذور الحقيقية الموجبة والسالبة والجذور المركبة للمعادلة :

- $x^3 + 2x^2 - x - 3 = 0$
- $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$
- $x^4 + x^3 + 5x^2 - x - 6 = 0$
- $x^5 - x^3 - x - 2 = 0$
- $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 2 = 0$

0 1 - أوجد المعادلة التي جذورها حسب الموضع:

- | | |
|---------------|---------------------------|
| (a) 1, 3, -2 | (e) 2, 1 جذر مكرر مرتين |
| (b) 4, 1, -1 | (f) -1 جذر مكرر مرتين و 3 |
| (c) -2, -1, 0 | (g) 1 جذر مكرر مرتين و 4 |
| (d) 1, 5, 2 | (h) 0, 2, 5 |

1 1 - أوجد مجموع الجذور ، وحاصل ضرب جذور المعادلات:

$$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0 \quad -$$

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 18 = 0 \quad -$$

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0 \quad -$$

2 1 - حل المعادلات التالية:

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \quad -$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \quad -$$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \quad -$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \quad -$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \quad -$$
